

# MODELAREA DINAMICĂ A TRANSMISIILOR CARDANICE ÎN VARIANTĂ MODULARĂ.

## Partea a III-a: Modelarea transmisiilor cardanice cu arbori intermediari elastici

# DYNAMIC MODELING OF CARDAN TRANSMISSIONS IN MODULAR VARIANT

## PART III: Modeling of Cardan Transmissions with Elastic Secondary Shafts

Radu SĂULESCU, Nicolae BERCAN, Livia HUDAN

Universitatea "Transilvania" din Braşov

**Rezumat.** Pe baza corelațiilor modulare prezentate în prima parte a lucrării [5] și a algoritmului propus în cea de-a doua [6], în această lucrare se propune un algoritm pentru modelarea forțelor și momentelor din transmisiile policardanice în premisa că arborii cardanici intermediari sunt elastici; acest algoritm se bazează pe asamblarea modelelor analitice (de tip modular) stabilite anterior și este exemplificat pe o transmisie bicardanică reprezentativă. Pentru a evidenția în mod distinct influența elasticității arborelui cardanic intermediar se neglijează momentan efectele inerțiale. Influența elasticității arborilor intermediari în prezența momentelor mecanice de inerție va fi prezentată într-o lucrare ulterioară.

**Cuvinte cheie:** arbori intermediari elastici, algoritm general, modelare dinamică asistată

### 1. Introducere

În prima parte a lucrării s-a elaborat o bibliotecă de *corelații modulare*, referitoare la forțele din *modulele tipice* ale transmisiilor cardanice [4, 5]; prin asamblarea acestor corelații, devine posibilă algoritmizarea și implicit simplificarea modelării forțelor și momentelor din transmisiile policardanice. În partea a doua a lucrării s-au modelat dinamic transmisiile policardanice, cu exemplificare pe o transmisie bicardanică [1, 2, 6], în premisa elementelor rigide.

În continuare se propune un algoritm general de stabilire a forțelor și momentelor din transmisiile bicardanice clasice, determinate static, în premisa că arborele intermediar este elastic. Pentru evidențierea distinctă a influenței elasticității arborelui intermediar, la început sunt neglijate efectele inerțiale. Aplicarea algoritmului generalizat propus este exemplificat pe transmisia bicardanică din figura 1.

### 2. Notații și premise

Notațiile și premisele utilizate în lucrările anterioare [5, 6] rămân valabile în continuare. La aceste premise se mai adaugă următoarele două:

**Abstract.** Based on modular correlations presented in the first part [5] and the algorithm shown in the second part [6], in this paper it is proposed an algorithm for modeling of forces and torques of n-cardan transmissions, considering that the secondary shafts are elastic; this algorithm relies on the assemblage of analytical models (of modular type), established previously, and is exemplified on a representative 2-cardan transmission. To point out distinctively the influence of the secondary shaft elasticity, inertial effects are neglected. The influence of secondary shafts elasticity in presence of mechanic moments of inertia will be presented in a following paper.

**Key words:** elastic secondary shafts, general algorithm, computational dynamic modeling

### 1. Introduction

In the first part of the paper, an initial base of *modular correlations* regarding the forces in the *typical modules* of the cardan transmissions was elaborated [4, 5]; the assemblage of these correlations makes it possible to define an algorithm and to simplify the computational modeling of forces and torques in n-cardan transmissions. In the second part of the paper, the n-cardan transmissions were dynamically simulated, giving as example a 2-cardan transmission [1, 2, 6] and considering the elements rigid.

Further on, a general algorithm for modeling the forces and torques of statically determined 2-cardan transmissions is proposed, considering the secondary shaft elastic. To point out distinctively the influence of the secondary shaft elasticity, in the beginning the inertial effects are neglected. The application of the proposed generalized algorithm is shown, as example, on the 2-cardan transmission from figure 1.

### 2. Notations and conditions

The notations and conditions used in the previous papers [5, 6] are valid. To these conditions the following two are added: the secondary shaft is

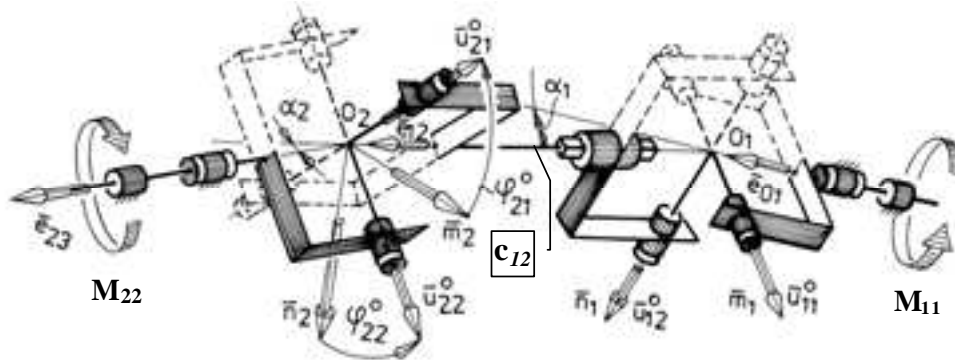


Fig. 1. Variantă de transmisie bicardană determinată static, cu arbore intermediar elastic  
 Fig. 1. Version of a statically determined 2-cardan transmission, with elastic secondary shaft

arborele intermediar este considerat elastic și momentul mecanic de inerție este neglijat. Elasticitatea arborilor intermediari este descrisă prin coeficientul de rigiditate  $c_{ij} = T_{j1}/\xi_{ij}$  [N·m/rad], în care  $T_{j1}$  reprezintă momentul de torsiune aferent furcii  $j1$ , iar  $\xi_{ij}$  desemnează deformația unghiulară torsională, adică diferența unghiulară dintre unghiurile de rotație ale furcilor arborelui intermediar  $ij$ :

$$\xi_{ij} = \varphi_{i2} - \varphi_{j1} \quad (1)$$

Pentru arborii intermediari, realizați din țevă de oțel, coeficientul de rigiditate și momentul mecanic de inerție au expresia cunoscută [7]:  $c = [\pi \cdot G \cdot (D^4 - d^4)]/32 \cdot l_{ij}$  [N·m/rad], în care  $l_{ij}$  [mm] reprezintă lungimea arborelui cardanic intermediar;  $G = 81000$  [N/mm<sup>2</sup>] reprezintă modulul de elasticitate transversală pentru oțel;  $D, d$  [mm] reprezintă diametrul exterior și respectiv diametrul interior ale arborelui cardanic intermediar.

### 3. Adaptarea corelațiilor cinematice la premiza arborilor elastici

Spre deosebire de modelarea cinematică a transmisiilor policardanice cu elemente rigide, în modelarea transmisiilor cu arbori intermediari elastici, egalitățile  $\varphi_{i2} = \varphi_{j1}$  se transformă în egalități de tipul  $\varphi_{j1} = \varphi_{i2} - \xi_{ij}$ ; celelalte corelații rămân nemodificate. Pentru exemplificare, în continuare se prezintă corelațiile cinematice necesare în modelarea unei transmisii tricardanice, cu arbori intermediari elastici:

$$\varphi_{11}^0 = 0, \quad \varphi_{i2}^0 = \arctg \left( \frac{\operatorname{tg} \varphi_{i1}^0}{\cos \alpha_i} \right), \quad \varphi_{j1}^0 = \beta_{ij} + \varphi_{i2}^0 - \nu_{ij} - 90^\circ; \quad (2)$$

$$\varphi_{i2} = \arctg \left( \frac{\operatorname{tg}(\varphi_{i1} + \varphi_{i1}^0)}{\cos \alpha_i} \right) - \varphi_{i2}^0, \quad \varphi_{j1} = \varphi_{i2} - \xi_{ij}; \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \theta_{i1} = \operatorname{tg} \alpha_i \cdot \sin(\varphi_{i1} + \varphi_{i1}^0), \quad \operatorname{tg} \theta_{i2} = \frac{\sin \alpha_{i1} \cdot \cos(\varphi_{i1} + \varphi_{i1}^0)}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_i \cdot \cos^2(\varphi_{i1} + \varphi_{i1}^0)}}. \quad (4)$$

elastic and the mechanic moment of inertia is neglected. The elasticity of secondary shafts is described by means of the rigidity factor  $c_{ij} = T_{j1}/\xi_{ij}$  [N·m/rad], where  $T_{j1}$  is the torque of the fork  $j1$ , and  $\xi_{ij}$  represents the angle of shearing deformation, meaning the difference between the rotation angles of the secondary shaft  $ij$  forks:

The rigidity factor and the mechanic moment of inertia of the steel pipe secondary shafts are known [7]:  $c = [\pi \cdot G \cdot (D^4 - d^4)]/32 \cdot l_{ij}$  [N·m/rad], where  $l_{ij}$  [mm] is the length of the secondary cardan shaft;  $G = 81000$  [N/mm<sup>2</sup>] is the shearing modulus of steel;  $D, d$  [mm] is the outer diameter, respectively the inner diameter of the secondary cardan shaft.

### 3. Adaptation of the kinematic correlations to the condition of elastic shafts

Unlike the kinematic modeling of n-cardan transmissions with rigid elements, in the modeling of transmissions with elastic secondary shafts the equalities  $\varphi_{i2} = \varphi_{j1}$  are changing into equalities of type  $\varphi_{j1} = \varphi_{i2} - \xi_{ij}$ ; the other correlations are the same. As an example, further on the kinematic correlations in modeling of a 3-cardan transmission with elastic secondary shafts are presented:

Ținând seama că variația momentelor de torsiune, ale unui arbore intermediar, este uzual redusă în raport cu valoarea sa medie, se poate admite simplificarea  $\xi \approx \text{constant}$ ; ca urmare, vitezele și accelerațiile unghiulare pot fi determinate cu expresiile:

$$\omega_{i2} = \omega_{i1} \cdot \frac{A_i}{1 + (A_i^2 - 1) \cdot \sin^2(\varphi_{i1} + \varphi_{i1}^0)}, \quad A_i = \frac{1}{\cos \alpha_i}, \quad \omega_{j1} \approx \omega_{i2}; \quad (5)$$

$$\varepsilon_{i2} = \frac{A_i \cdot \varepsilon_{i1} + \omega_{i1} \cdot \omega_{i2} \cdot (1 - A_i^2) \cdot \sin 2(\varphi_{i1} + \varphi_{i1}^0)}{1 + (A_i^2 - 1) \cdot \sin^2(\varphi_{i1} + \varphi_{i1}^0)}, \quad \varepsilon_{j1} \approx \varepsilon_{i2}. \quad (6)$$

#### 4. Adaptarea algoritmului general la premisa arborilor intermediari elastici

În premisele arborilor intermediari elastici, o parte din relațiile algoritmului, propus în lucrarea precedentă [6] rămân neschimbate; se modifică numai relațiile în care intervine influența rigidității  $c$ . Astfel, momentul de torsiune pe un arbore cardanic, considerat elastic, devine:

$$T_{j1} = \xi_{ij} \cdot c_{ij} \quad (7)$$

Pentru exemplificare, în figura 2 se prezintă sintetic, sub formă de organigramă, în variantă modulară, algoritmul pentru transmisiile bicardanice de tipul celor din figura 1.

Algoritmul generalizat propus stă la baza unui program de calcul, elaborat în mediul Excel, și a fost rulat pentru un set reprezentativ de date numerice; aceste date sunt precizate deasupra figurilor. Ca exemplu de simulare numerică, în continuare sunt prezentate câteva diagrame pentru variațiile unor diferențe unghiulare, viteze și accelerații unghiulare precum și a unor momente de torsiune reprezentative.

#### 5. Simulări numerice și concluzii

În urma simulărilor bazate pe organigrama din figura 2, în continuare sunt ilustrate diagramele unor diferențe unghiulare (fig. 3,a), viteze unghiulare (fig. 3,b), accelerații unghiulare (fig. 3,c) și a unor momente de torsiune (fig. 3,d) din transmisia bicardanică analizată anterior. Parametrii de stare considerați sunt precizați deasupra fiecărei figuri.

În condițiile exemplului numeric considerat, se observă că elasticitatea arborelui intermediar influențează în principal cinematica transmisiei și are o influență redusă asupra momentelor de torsiune (v. fig. 3 și 4). În consecință, concluziile prezentate în lucrarea anterioară, referitoare la momente, rămân practic valabile și în acest caz.

Considering that the variation of the torques of a secondary shaft is usually reduced in relation to its average value, the cancellation  $\xi \approx \text{constant}$  can be admitted; as a consequence, the angular speeds and acceleration can be determined by means of the expressions:

#### 4. Adaptation of the general algorithm to the condition of elastic secondary shafts

Considering the elastic secondary shafts, part of the relations of the algorithm proposed in the previous paper [6] remain the same; only the relations the influence of rigidity  $c$  interferes with are changed. The torque on an elastic considered cardan shaft becomes:

As an example, in figure 2 there is presented a flow chart, in modular version, of the algorithm for 2-cardan transmissions as those shown in figure 1.

The proposed generalized algorithm is the basis of a computational program, elaborated by means of the soft Excel, run for a representative input data set; these data are specified above the figures. As an example of numerical simulation, further on some diagrams for angular differences, angular speeds and accelerations and representative torques are presented.

#### 5. Numerical simulations and conclusions

After the simulations based on the flow chart from figure 2, further on the diagrams of angular differences (figure 3,a), angular speeds (figure 3,b), angular accelerations (figure 3,c) and torques (figure 3,d) of the previously analyzed 2-cardan transmission are presented. The considered parameters are specified above each figure.

Under the circumstances of the given numerical example, one can observe that the secondary shaft elasticity mainly influences the transmission kinematic and has a reduced influence on the torques (see figures 3 and 4). Thus, the conclusions regarding torques, presented in the previous paper, are valid also in this case.

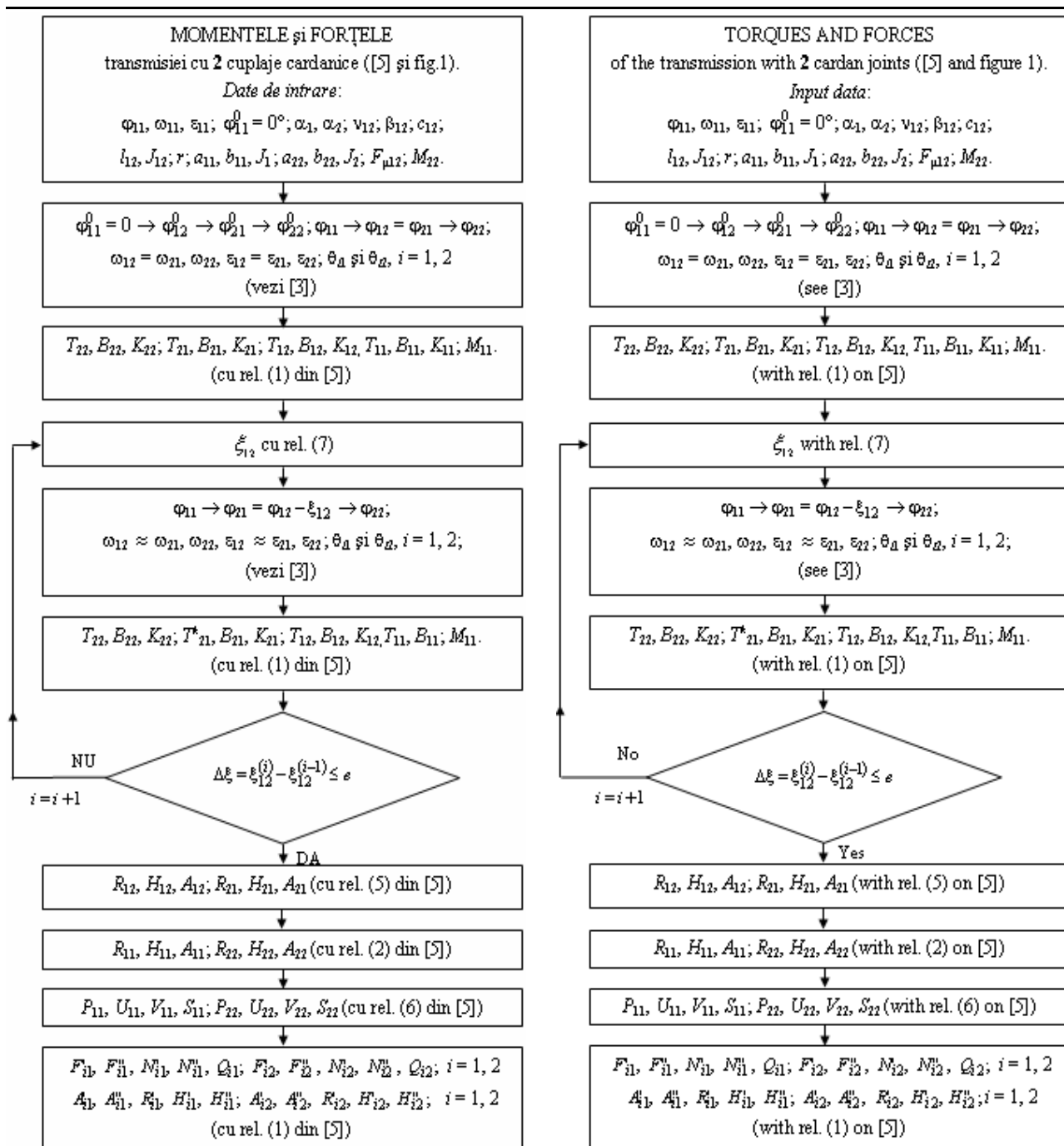


Fig. 2. Organigrama algoritmului de modelare modulară al unei transmisiuni bicardanice, în premisa că arborele intermediar este elastic

Fig. 2. Flow chart of the modular modeling algorithm of a 2-cardan transmission, considering the secondary shaft elastic

În schimb, elasticitatea arborelui intermediar induce o abatere de la homocinetism, care în anumite cazuri poate deveni semnificativă (v. fig. 3, b).

Creșterea abaterii de la homocinetism este însoțită de generarea unor momente de inerție torsionale care influențează negativ funcționarea transmisiiei. Ca urmare, se impune o corelare judicioasă între momentele de încărcare și elasticitatea arborilor cardanici.

The elasticity of the secondary shaft induces a homokinetic deviation, which can become significant in some cases (see figure 3, b).

The increasing of the homokinetic deviations is accompanied by generation of the inertial torques which influence negatively transmission acting. In consequence, a judicious correlation becomes necessary between the load torque and cardan shafts' elasticity.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 27,99^\circ, \varphi_{11}^0 = 0^\circ, v_{12} = 180^\circ, \beta_{12} = 266,4^\circ, \omega_{11} = 1 \text{ [rad/sec]}, \varepsilon_{11} = 0 \text{ [rad/sec}^2\text{]}$$

$$c_{12} = 9526895997 \text{ [N}\cdot\text{m/rad]}, J_1 = J_{12} = J_3 = 0 \text{ [kg}\cdot\text{m}^2\text{]}, M_2 = 150 \text{ [N}\cdot\text{m]}$$

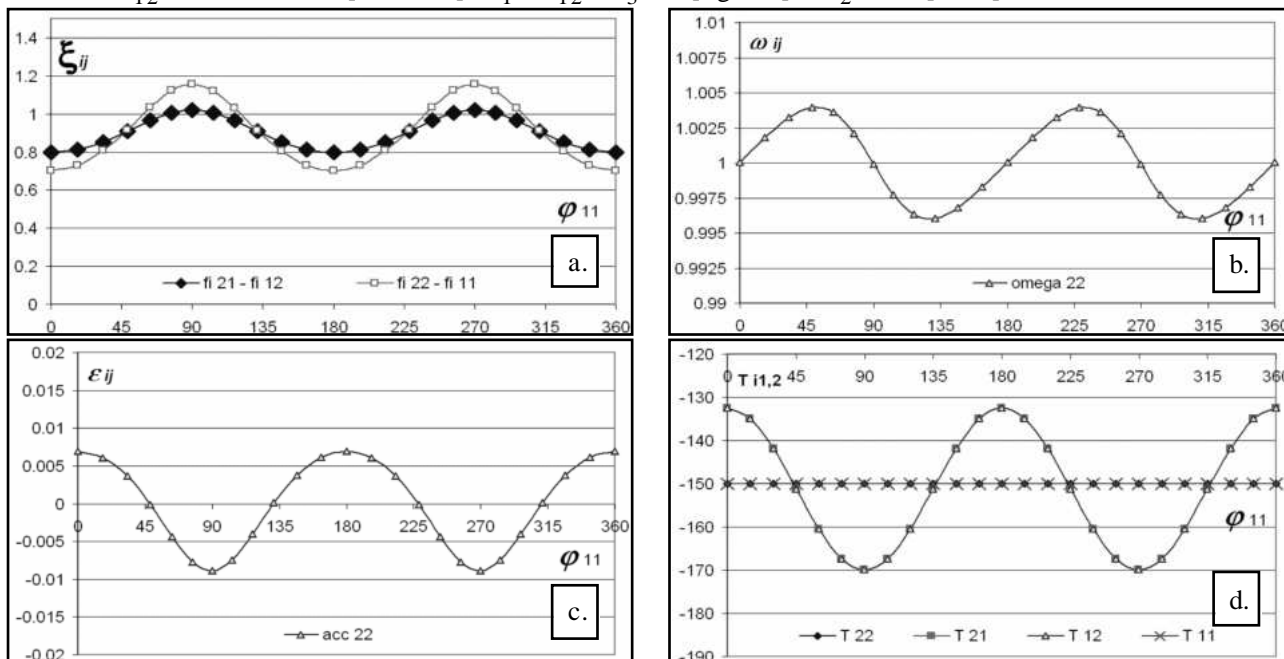


Fig. 3. Variațiile unor: **a.** deformații unghiulare, **b.** viteze unghiulare, **c.** accelerații unghiulare și **d.** momente de torsiune în premisa arborelui intermediar elastic  
 Fig. 3. Diagrams of **a.** angles of shearing deformation, **b.** angular speeds, **c.** angular accelerations and **d.** torques, considering the secondary shaft elastic

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 27,99^\circ, \varphi_{11}^0 = 0^\circ, v_{12} = 180^\circ, \beta_{12} = 266,4^\circ, \omega_{11} = 1 \text{ [rad/sec]}, \varepsilon_{11} = 0 \text{ [rad/sec}^2\text{]}$$

$$c_{12} = \infty \text{ [N}\cdot\text{m/rad]}, J_1 = J_{12} = J_3 = 0 \text{ [kg}\cdot\text{m}^2\text{]}, M_2 = 150 \text{ [N}\cdot\text{m]}$$

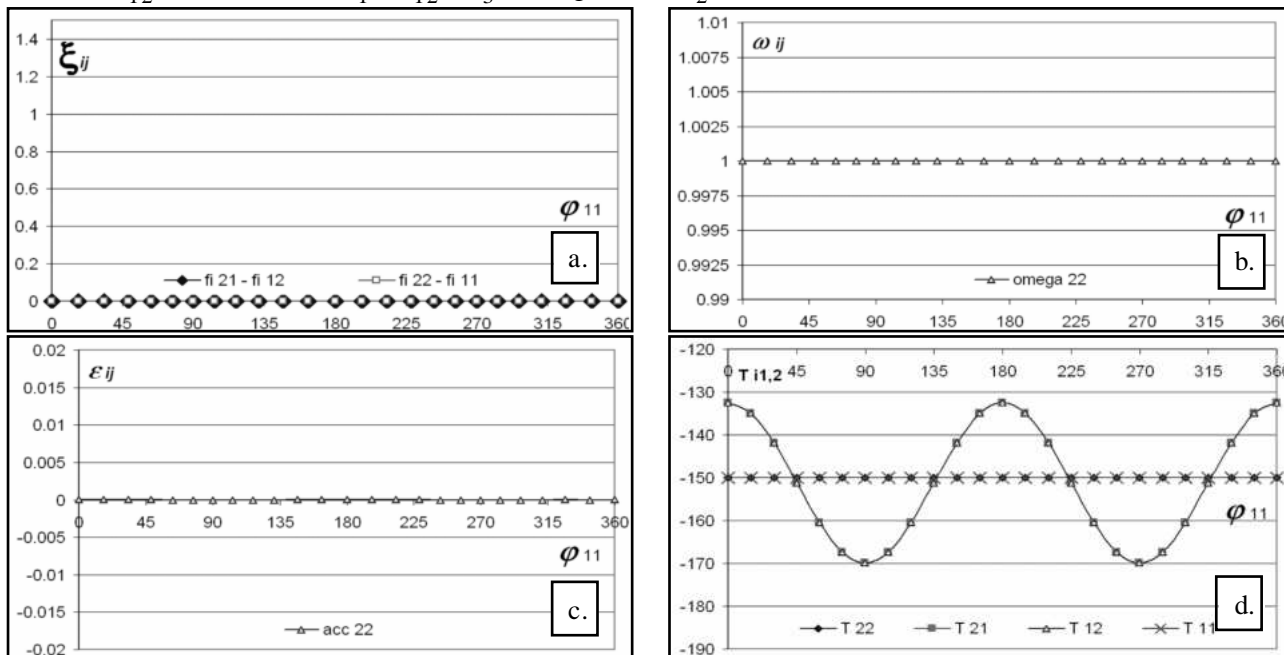


Fig. 4. Variațiile unor: **a.** deformații unghiulare, **b.** viteze unghiulare, **c.** accelerații unghiulare și **d.** momente de torsiune în premisa arborelui intermediar rigid  
 Fig. 4. Diagrams of **a.** angles of shearing deformation, **b.** angular speeds, **c.** angular accelerations and **d.** torques, considering the secondary shaft rigid

În fig. 3,a este reprezentată variația deformației unghiulare a arborelui intermediar ( $\varphi_{21} - \varphi_{12}$ ), suprapus cu deplasarea unghiulară totală ( $\varphi_{22} - \varphi_{11}$ ); deformația unghiulară totală reprezintă însumarea efectelor datorate heterocinetismului cauzat de deformațiile elastice ale arborilor. Conform fig. 3,a, variațiile diferențelor unghiulare, care descriu deformațiile torsionale ale arborelui intermediar ( $\varphi_{21} - \varphi_{12}$ ), sunt reduse, în raport cu variațiile lor medii; se justifică astfel premisa simplificatoare  $\xi_{ij} = \text{constant}$ .

Un studiu detaliat al influențelor datorate elasticității arborilor intermediari, cumulate cu efectele inerțiale ale acestora, va fi prezentat într-o lucrare ulterioară.

In the figure 3,a the variation of the intermediate shaft angular deformation ( $\varphi_{21} - \varphi_{12}$ ) is represented; the total angular deformation represents the summation of the effects due to heterokinematics generated by the elastic shaft deformations. According to figure 3,a, the variations of angular differences, which describe the torsional deflections of the secondary shaft ( $\varphi_{21} - \varphi_{12}$ ), are low in relation to their medium; the condition  $\xi_{ij} = \text{constant}$  is justified.

A detailed study regarding the influence of secondary shafts elasticity's, added to their inertial effects, will be presented in a following paper.

### Bibliografie

1. Diaconescu, D., Böhm, Ch., Neagoe, M., Jaliu, C.: *The precision analysis of a classical cardan mechanism on the basis of Different spatial configurations*. Scientific bulletin of the "Transilvania" University of Braşov, vol. 5 (40) - series A, ISSN 1223-9631, 1998, p. 37-44, Brasov, Romania
2. Duditz, F.: *Cardan transmissions and their applications*. VDI-Verlag, Düsseldorf, Germany, 1973 (in German)
3. Dudiță, Fl., Diaconescu, D.V., Neagoe, M., Săulescu, R.: *On the modelling of homokinetic tricardanic transmissions*. Proceedings of 2nd International Conference „Research and development in mechanical industry” RaDMI 2002, Vol. II, p. 872-877, ISBN 86-83803-03-1, Vrnjacka Banja, Yugoslavia, September 02-04, 2002
4. Dudiță, Fl., Diaconescu, D., Böhm, C., Neagoe, M., Săulescu, R.: *Cardan transmissions*. Transilvania Express Publisher, ISBN 973-8196-20-5 Braşov, Romania, 2003 (in Romanian)
5. Diaconescu, D.V., Jaliu, C., Săulescu, R.: *Dynamic modeling of a 2-Cardan transmission in a modular variant. Part I: Modelling of the representative modules*. **RECENT**, Vol. 7, nr. 1(16), March, 2006, p. 18-23, ISSN 1582-0246, Brasov, Romania
6. Săulescu, R., Diaconescu, D.V., Borca, A.: *Dynamic modeling of a 2-Cardan transmission in a modular variant. Part II: The Dynamic Analysis of a Transmission*. **RECENT**, Vol. 7, nr. 2(17), June, 2006, p. 88-92, ISSN: 1582-0246, Brasov, Romania
7. \* \* \*: *Joint shafts for industry applications*. Gelenkwellenbau GmbH-Essen, KGN Automotive, Cardantec Division (in German)

Lucrare primită în decembrie 2006  
și în formă revizuită în februarie 2007

Received in December 2006,  
and revised form in February 2007