O NOUĂ FORMULĂ DE CALCUL A CONSTANTEI DE SOLIDIFICARE A PIESELOR TURNATE

A NEW FORMULA FOR COMPUTING THE CASTING SOLIDIFICATION CONSTANT

Cristinel MORTICI[*], Mirela MORTICI[**]
[**] „Valahia" University of Târgovişte, Romania
[**] „Voievodul Mircea" High School, Târgovişte, Romania

Rezumat. Este stabilită următoarea formulă pentru calculul constantei de solidificare:

$$k = \frac{b_S\sqrt{\pi a_L a_S}\,(T_{Sme} - T_C)}{b_S\sqrt{a_S}\,(T_{Sme} - T_C) + b_L\sqrt{a_L}\,(T_{0me} - T_{Sme})},$$

folosind dezvoltările în serie ale funcției exponențiale şi a funcției erorilor.

Cuvinte cheie: turnare, solidificare, funcția erorilor

Abstract. It is established the following formula for computing the solidification constant

$$k = \frac{b_S\sqrt{\pi a_L a_S}\,(T_{Sme} - T_C)}{b_S\sqrt{a_S}\,(T_{Sme} - T_C) + b_L\sqrt{a_L}\,(T_{0me} - T_{Sme})},$$

using the expansions in power series of the exponential function and error function.

Key words: casting, solidification, error function

1. Introducere

O problemă importantă în procesul de turnare este aceea de a găsi formule cât mai precise pentru calculul constantei de solidificare.

Constanta de solidificare are variații relativ mari în funcție de natura aliajului şi în funcție de numeroşi alți factori.

În lucrarea de față se foloseşte relația pe care o satisface constanta de solidificare, ca o consecință a formulelor care dau expresia analitică Stephan şi Schwarz a câmpului de temperatură din forma de turnare. Este vorba de următoarea relație:

1. Introduction

An important problem in casting is the problem of finding more precise formulas for computing the solidification constant.

The solidification constant has large variations in function of the alloy nature and in function of a lot of other factors.

In this work it is used the relation involving the solidification constant, which is a consequence of the formulas for analytic expressions Stephan and Schwarz of the temperature field from the mould. In fact, the following relation holds:

$$\rho_L \cdot L\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot k = b_S\cdot(T_{Sme} - T_C)\cdot\frac{e^{-\frac{k^2}{4\cdot a_S}}}{erf\left(\frac{k}{2\sqrt{a_S}}\right)} - b_L\cdot(T_{0me} - T_{Sme})\cdot\frac{e^{-\frac{k^2}{4\cdot a_L}}}{1 - erf\left(\frac{k}{2\sqrt{a_L}}\right)}, \quad (1)$$

(de exemplu [1, 3]), unde:

- ρ_L este densitatea aliajului lichid
- L este căldura latentă specifică aliajului
- b_S este coeficientul de acumulare a căldurii a aliajului solidificat
- T_{Sme} este temperatura solidus a aliajului
- T_C este temperatura de contact la interfață
- a_S este coeficientul de difuzibilitate termică a aliajului solidificat
- b_L este coeficientul de acumulare a căldurii a aliajului lichid
- T_{0me} este temperatura inițială de turnare a aliajului
- a_L este coeficientul de difuzibilitate termică a aliajului lichid

Are loc mereu inegalitatea $T_{Sme} \geq T_C$, deşi acestea au valori apropiate în general. În calcule nu se poate considera că $T_{Sme} = T_C$, deoarece în relația (1) ar dispărea primul termen din membrul drept şi astfel rezultă relația imposibilă:

(e.g. [1, 3]), where:

- ρ_L is the liquid alloy density
- L is the specific latent heat of alloy
- b_S is the heat accumulation coefficient of the solidified alloy
- T_{Sme} is the solidus temperature of the alloy
- T_C is the contact temperature at the interface
- a_S is the thermal diffusivity coefficient of the solidified alloy
- b_L is the heat accumulation coefficient of the liquid alloy
- T_{0me} is the initial temperature of the liquid alloy
- a_L is the thermal diffusivity coefficient of the liquid alloy

It allways holds the inequality $T_{Sme} \geq T_C$, even if these values are closed each other. In calculations, we cannot consider that $T_{Sme} = T_C$, because in the relation (1), the first term in the right side will vanish and the result is an impossible relation:

$$\rho_L \cdot L \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot k = -b_L \cdot (T_{0me} - T_{Sme}) \cdot \frac{e^{-\frac{k^2}{4 \cdot a_L}}}{1 - erf\left(\frac{k}{2\sqrt{a_L}}\right)}, \tag{2}$$

având în vedere că membrul stâng este pozitiv, iar membrul drept este negativ.

Deşi sunt date metode pentru calculul constantei de solidificare în ipoteza $T_{Sme} = T_C$ (de exemplu în [2]), iar verificările practice se dovedesc a fi în concordanţă cu formula obţinută, este de preferat a stabili formule pentru calculul constantei de solidificare bazate pe considerarea cazului real la care $T_{Sme} > T_C$.

2. Rezultatul principal

Pentru a exprima constanta de solidificare k din relaţia (1), se utilizează formula de dezvoltare în serie a funcţiei exponenţiale:

taking into account that the left side is positive and the right side is negative.

However, there are given other methods for computing the solidification constant under the hypotesis $T_{Sme} = T_C$ (e.g. [2]), but nevertheless, the practical verifications are in concordance with the deduced formula. Because of this, other formulas must be established for computing the solidification constant, under the general assumption that $T_{Sme} > T_C$.

2. Main Result

In order to express the solidification constant k from the relation (1), the formula of power series for the exponential function will be used:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot x^i, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{3}$$

şi formula pentru funcţia erorilor

and the formula for the error function

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!(2i+1)} \cdot x^{2i+1}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Prin împărţirea relaţiei (1) cu $\rho_L \cdot L \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ se obţine

By dividing the relation (1) by $\rho_L \cdot L \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, the result is

$$k = \alpha \cdot \frac{e^{-\frac{k^2}{4a_S}}}{erf\left(\frac{k}{2\sqrt{a_S}}\right)} + \beta \cdot \frac{e^{-\frac{k^2}{4a_L}}}{1 - erf\left(\frac{k}{2\sqrt{a_L}}\right)} \tag{4}$$

În care α şi β au semnificaţiile următoare

where α şi β stand for

$$\alpha = \frac{2b_S (T_{Sme} - T_C)}{\rho_L L \sqrt{\pi}}, \quad \beta = -\frac{2b_L (T_{0me} - T_{Sme})}{\rho_L L \sqrt{\pi}}. \tag{5}$$

Prin înlocuirea relaţiilor (2) şi (3) în (4) se obţine

By replacing the relations (2) and (3) in (4), the result is

$$k = \alpha \cdot \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot \left(-\frac{k^2}{4a_S}\right)^i}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!(2i+1)} \cdot \left(\frac{k}{2\sqrt{a_S}}\right)^{2i+1}} + \beta \cdot \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot \left(-\frac{k^2}{4a_L}\right)^i}{1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!(2i+1)} \cdot \left(\frac{k}{2\sqrt{a_L}}\right)^{2i+1}}. \tag{6}$$

Având în vedere că seriile de puteri utilizate au viteza de convergenţă foarte rapidă, acestea se pot aproxima cu primii doi termeni ai fiecăreia şi astfel relaţia (6) devine

Taking in consideration that the power series used have fast convergence speed, these series could be approximated with the first two terms of each series and consequently, the relation (6) becomes

$$k=\alpha\cdot\frac{1-\dfrac{k^2}{4a_S}}{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_S}}\cdot k-\dfrac{1}{12a_S\sqrt{a_S}}\cdot k^3\right)}+\beta\cdot\frac{1-\dfrac{k^2}{4a_L}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_L}}\cdot k-\dfrac{1}{12a_L\sqrt{a_L}}\cdot k^3\right)}. \tag{7}$$

Prin aducere la acelaşi numitor

By computing the common denominator

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_S}}\cdot k^2-\frac{1}{12a_S\sqrt{a_S}}\cdot k^4\right)\cdot\left[1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_L}}\cdot k-\frac{1}{12a_L\sqrt{a_L}}\cdot k^3\right)\right]=$$
$$=\alpha\left(1-\frac{k^2}{4a_S}\right)\cdot\left[1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_L}}\cdot k-\frac{1}{12a_L\sqrt{a_L}}\cdot k^3\right)\right]+\beta\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\left(1-\frac{k^2}{4a_L}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_S}}\cdot k-\frac{1}{12a_S\sqrt{a_S}}\cdot k^3\right). \tag{8}$$

În relația anterioară, prin înmulțirea parantezelor, pentru obținerea unui polinom în k, rezultă un polinom de gradul al 7-lea. Luând în considerare că puterile de ordin superior ale lui k sunt comparabile cu zero, acestea pot fi ignorate din relație. În mod concret, dacă se ignoră puterile de ordin mai mare sau egal cu 3, atunci se obține, după înmulțire cu π, următoarea ecuație de gradul al doilea:

In previous relation by factoring the expressions, in order to obtain a k polynomial, the result is a 7-th degree polynomial. Taking into account that the higher powers of k are closed to zero, the other terms could be ignored. More precisely, if the terms containing the powers of k greater than or equal to 3 are ignored, then after multiplying with π, the result is the following quadratic equation:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a_S}}+\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{4a_S}\right)\cdot k^2+\left(\frac{\alpha}{\sqrt{a_L}}-\frac{\beta}{\sqrt{a_S}}\right)k-\alpha\sqrt{\pi}=0. \tag{9}$$

Deja termenul care conține k^3 are coeficientul foarte apropiat de zero, neglijabil, şi anume:

Even now, the coefficient of the term containing k^3 is closed to zero, practical neglijable:

$$\left(\frac{1}{\pi\sqrt{a_S a_L}}+\frac{\alpha}{12a_L\sqrt{\pi a_L}}+\frac{\alpha}{4a_S\sqrt{\pi a_L}}-\frac{\beta}{12a_S\sqrt{\pi a_S}}-\frac{\beta}{4a_L\sqrt{\pi a_S}}\right)k^3. \tag{10}$$

Prin utilizarea formulei de rezolvare a ecuației de gradul al doilea şi păstrând soluția pozitivă din (9) rezultă:

By using the solving formula for the quadratic equation and keeping the positive root of (9), the result is:

$$k=\frac{-\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{a_L}}-\dfrac{\beta}{\sqrt{a_S}}\right)+\sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{a_L}}-\dfrac{\beta}{\sqrt{a_S}}\right)^2+4\alpha\sqrt{\pi}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_S}}+\dfrac{\alpha\sqrt{\pi}}{4a_S}\right)}}{2\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_S}}+\dfrac{\alpha\sqrt{\pi}}{4a_S}\right)} \tag{11}$$

sau

or

$$k=\frac{\dfrac{\alpha}{\sqrt{a_L}}-\dfrac{\beta}{\sqrt{a_S}}}{2\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_S}}+\dfrac{\alpha\sqrt{\pi}}{4a_S}\right)}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{4\alpha\sqrt{\pi}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_S}}+\dfrac{\alpha\sqrt{\pi}}{4a_S}\right)}{\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{a_L}}-\dfrac{\beta}{\sqrt{a_S}}\right)^2}}-1\right). \tag{12}$$

Mai departe, se utilizează formula de aproximare (consecință a formulei lui Taylor):

Further, is used the following approximation formula (a consequence of the Taylor formula):

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot x \tag{13}$$

valabilă pentru x apropiat de zero. Prin înlocuire în relația (12), se obține:

which is valid if x is closed to zero. By replacing in the relation (12), the result is:

$$k = \frac{\dfrac{\alpha}{\sqrt{a_L}} - \dfrac{\beta}{\sqrt{a_S}}}{2\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_S}} + \dfrac{\alpha\sqrt{\pi}}{4a_S}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4\alpha\sqrt{\pi}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_S}} + \dfrac{\alpha\sqrt{\pi}}{4a_S}\right)}{\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{a_L}} - \dfrac{\beta}{\sqrt{a_S}}\right)^2} \right), \tag{14}$$

apoi după simplificări, rezultă:

then we deduce, after some simplifications:

$$k = \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{\dfrac{\alpha}{\sqrt{a_L}} - \dfrac{\beta}{\sqrt{a_S}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\dfrac{1}{\sqrt{a_L}} - \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{a_S}}}. \tag{15}$$

Mai departe, înlocuind înapoi valorile lui α, β din relațiile (5), rezultă

Further, by replacing back the values α, β from the relation (5), it results that

$$k = \frac{\sqrt{\pi}}{\dfrac{1}{\sqrt{a_L}} + \dfrac{b_L(T_{0me} - T_{Sme})}{b_S(T_{Sme} - T_C)} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{a_S}}}. \tag{16}$$

După amplificări, formula rezultată este:

After some amplifications, is obtained the formula:

$$k = \frac{b_S\sqrt{\pi a_L a_S}\,(T_{Sme} - T_C)}{b_S(T_{Sme} - T_C)\sqrt{a_S} + b_L(T_{0me} - T_{Sme})\sqrt{a_L}}. \tag{17}$$

În final s-a verificat corectitudinea acestei formule utilizând programele MAPLE şi MATHEMATICA. Mai precis, s-au considerat valori particulare pentru datele inițiale şi s-a calculat cu acestea valoarea constantei de solidificare k, folosind formula (17). Mai departe, s-a înlocuit această valoare calculată în relația (1) împreună cu celelalte date inițiale considerate, pentru a vedea dacă relația (1) este satisfăcută, deci dacă valoarea k obținută din (17) este într-adevăr soluție a ecuației (1). În fine, s-a ajuns la concluzia că valoarea k satisface (1), în sensul că termenii din (1) diferă prin cel mult 10^{-6}.

Finally, are verified this obtained formula using the programs MAPLE and MATHEMATICA. To be more precisely, for some particular values for the initial data, are computed the theoretical value for the solidification constant k using formula (17). Further, are replaced the obtained value for k in the equality (1) and also replaced the considered initial data in (1). Then are arrived at the conclusion that the computed value k is indeed a solution of the equation (1), where the terms of the relation (1) differ in all considered cases by at most 10^{-6}.

References

1. Bratu, C., Sofroni, L., Brabie, V.: *Termophysics of the pouring processes* (*Termofizica proceselor de turnare*). Polytechnic Institute of Bucharest, Romania, 1984 (in Romanian)
2. Ciobanu, I., Maşniță, M., Monescu, V.: *Determination of the castings solidification constant by analytical calculation and by computer solidification simulation.* **RECENT**, vol. 8(2007), nr. 1(19), June 2007, p. 8-14, ISSN 1582-0246, Brasov, Romania
3. Sofroni, L., Brabie, V., Bratu, C.: *Theoretical basis of pouring* (*Bazele teoretice ale turnării*). "Didactică şi Pedagogică" Publishing House, Bucharest, Romania, 1980 (in Romanian)
4. Ghiță C.: *Metallurgical mathematics* (*Matematică metalurgică*). "Academiei" Publishing House, Bucharest, Romania, 1998 (in Romanian)
5. Ciobanu, I., Maşniță, M., Monescu, V., Roşescu, Gh.: *Comparison between the solidification time values calculated analytically and those determined by computer solidification simulation*. Metalurgia, no. 11, November, 2006, ISSN 0461-9579, p. 21-30, Bucharest, Romania (in Romanian)

Lucrare primită în Decembrie 2007
(şi în formă revizuită în Martie 2008)

Received in December 2007
(and revised form in March 2008)