

# DESPRE PARAMETRII CINEMATICI AI UNUI AUTOMAT HIPOCICLOIDAL SPAȚIAL PENTRU DEFORMARE PLASTICĂ LA RECE

# ABOUT KINEMATIC PARAMETERS OF THE SPATIAL HYPOCYCLOIDAL AUTOMATIC MACHINE FOR COLD FORMING

Răzvan RĂCEU, Cosmina PÖLLNER

Transilvania University of Brasov, Romania

**Rezumat.** Întreaga familie a automatelor hipocicloide plane pentru deformare plastică, este un concept românesc original dezvoltat la Universitatea Transilvania din Brașov.

Cercetările recente au scos în evidență posibilitatea de a dezvolta acest grup de automate de presare la rece către un nou subgrup de automate hipocicloide spațiale. Culisoarele acestor automate realizează o mișcare liniară, acest element conducând la descrierea unei hipocicloide spațiale, prin urmare acest nume este dat la automatele în cauză. În lanțul cinematic al automatului de presare, este prezent un mecanism planetar cu roți dințate cilindrice, cu angrenare interioară care generează traiectoria hipocicloidei spațiale, folosit ca un mecanism pentru transformarea mișcării de rotație în mișcare de translație.

Această lucrare prezintă, cu demonstrații adecvate, legea de mișcare a elementului antrenor, legea de mișcare caracteristică culisoarelor acestor automate de presare, și parametrii cinematici.

**Cuvinte cheie:** hipocicloide, hipocicloide spațiale, sferice, automate pentru deformare plastică la rece, parametrii cinematici

## 1. Introducere

Sunt cunoscute automate hipocicloide plane pentru presare la rece [1]. Aceste mașini utilizează ca traiectorie a elementului antrenor al culisoarelor o hipocicloidă plană unicursală. Sunt preferate hipocicloidele plane cu număr redus de puncte de întoarcere [2].

Hipocicloidele plane sunt generate cu ajutorul mecanismelor planetare cu roți dințate cilindrice, cu angrenare interioară, la care roata centrală este fixă. Astfel de mecanisme sunt utilizate la automate hipocicloide plane ca mecanisme de transformare a mișcării de rotație a arborelui principal în mișcare de translație rectilinie alternativă cu autoîntoarcere, periodică și temporară, a culisoarelor acestor mașini.

Este identificată posibilitatea construirii de automate hipocicloide spațiale, cu structură și mod de funcționare principal identice automatelor hipocicloide plane.

La automatele hipocicloide spațiale se utilizează ca mecanism de transformare un

**Abstract.** Plane hypocycloidal automatic machines, forming an entire family, are a Romanian original concept developed at Transilvania University of Brasov.

Recent researches emphasize the possibility of developing this group of automatic machines for cold forming by a new subgroup, potentially very diverse, the spatial hypocycloidal automatic machines. Although the slide blocks of these automatic machines realize a linear motion, the element which drives it describes a spatial hypocycloid, hence the name given to automatic machines in question. In the main cinematic chain of the automatic machine, there is present a sun-and-planet gear with conic gears that generate spatial hypocycloidal trajectories, used as a mechanism for transforming rotary motion into linear-alternative one.

This paper presents, with adequate demonstrations, the law of motion of the driving element, the law of motion characterizing the slide blocks of these automatic machines, and its cinematic parameters.

**Key words:** hypocycloids, spatial spherical hypocycloids, automatic machines for cold forming, cinematic parameters

## 1. Introduction

Plane hypocycloidal automatic machines for cold forming are known [1]. These machines use as trajectory of the elements driving the slide blocks, a plane unicursal hypocycloid. The plane hypocycloids with a reduced number of reversal points are preferred [2].

Plane hypocycloids are generated with sun-and-planet gears provided with cylindrical gears, and internal gearing, whereof the central gear is fixed. Such mechanisms are used at plane hypocycloidal automatic machines as mechanisms transforming the rotary motion of the main shaft into linear-alternative translation motion with self return, periodical and temporary, of the slide blocks.

There is identified the possibility of building spatial hypocycloidal automatic machines, with structure and functioning that are mainly identical to the plane hypocycloidal automatic machines.

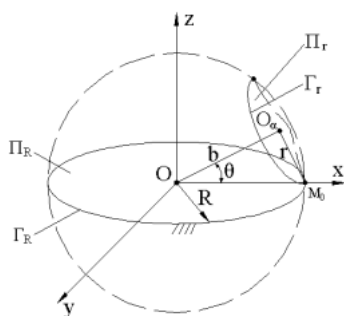
In spatial hypocycloidal automatic machines, a sun-and-planet mechanism with conic gears as

mecanism planetar cu roți dințate conice, roata centrală fiind fixă.

Lucrarea de față își propune să prezinte parametrii cinematici ai unor astfel de mașini, adică expresiile de spațiu, viteză și accelerație ale culisoarelor. Pentru aceasta trebuie determinată ecuația traiectoriei descrisă de punctul generator de hipocicloidă spațială.

## 2. Informații generale

În aplicațiile tehnice se utilizează frecvent cazuri particulare. Lucrarea de față abordează unul dintre acestea, cel al hipocicloidelor sferice. La acestea atât cercul de bază, cât și cercul rulant sunt cercuri ale aceleiași sferă, tangente într-un punct. În particular, cercul de bază poate fi chiar un ecuator al sferei, figura 1, caz în care hipocicloidele generate sunt unele sferice ecuatoriale.



Scrierea ecuației unei hipocicloide sferice ecuatoriale se poate face față de un sistem de coordonate oarecare. Fără a restrânge generalitatea, expresia ecuației menționate poate fi exprimată mai simplu dacă sistemul de coordonate ales este unul particular, favorabil [3].

Se adoptă ca sistem de coordonate unul cartezian,  $Oxyz$ , cu originea  $O$  în centrul sferei  $S$ . În acest sistem de coordonate se iau în considerare un cerc de bază  $\Gamma_R$  și un cerc rulant  $\Gamma_r$ . Cercul  $\Gamma_R$ , cu raza  $R = R_S$ , este un ecuator al sferei  $S$  și se obține ca intersecție a sferei cu un plan  $\Pi_R$  ce conține centrul  $O$  al acesteia.

Cercul rulant  $\Gamma_r$ , de rază  $r < R_S$ , este tangent la  $\Gamma_R$  în punctul  $M_0$  și se obține ca intersecție a sferei  $S$  cu planul  $\Pi_r$  aflat la distanța  $b$  de centrul  $O$ .

Fie  $O_\alpha$  centrul cercului  $\Gamma_r$ . Direcția  $OO_\alpha$  face cu planul  $\Pi_R$  un unghi  $\theta$ . Implicit, unghiul dintre planele  $\Pi_R$  și  $\Pi_r$  este  $\pi/2 - \theta$ .

Punctele cercului  $\Gamma_r$ , inclusiv  $M_0$ , descriu hipocicloide sferice ecuatoriale identice, dar defazate între ele în raport cu o direcție anume din planul  $\Pi_R$ . Rezultă că se poate adopta o orientare particulară a sistemului de coordonate care să asigure cea mai simplă expresie a hipocicloidei

transforming mechanism is used; the central gear fixed.

The paper herein sets about to submit the cinematic parameters of such machines, which are the space, speed and acceleration expressions of the slide blocks. The equation of the trajectory described by the spatial hypocycloid generating point must be determined to this purpose.

## 2. General information

In technical applications, special cases are frequently resorted to. The paper herein tackles such a case, that of spherical hypocycloids. In these, both the base and turning circle are circles of the same sphere, tangent in a point. In particular, the base circle may even be an equator of the sphere, figure 1, in which case the generated hypocycloids are equatorial spherical ones.

Figura 1. Sistemul de coordonate cartezian principal  $Oxyz$  asociat cercului bază  $\Gamma_R$ , fix  
Figure 1.  $Oxyz$  principal Cartesian system of coordinates associated to the fixed base circle  $\Gamma_R$

The equation of an equatorial spherical hypocycloid may be written against a certain system of coordinates. Without restricting the generality, the expression of the mentioned equation may be more simply expressed if the chosen system of coordinates is particular, favourable [3].

The adopted system of coordinates is Cartesian,  $Oxyz$ , with the origin  $O$  in the centre of the sphere  $S$ . In this system of coordinates we consider a base circle  $\Gamma_R$  and a turning circle  $\Gamma_r$ . The circle  $\Gamma_R$ , with the ray  $R = R_S$ , is an equator of the sphere  $S$  and is obtained as intersection of the sphere with a plane  $\Pi_R$  containing its centre  $O$ .

The turning circle  $\Gamma_r$ , of ray  $r < R_S$ , is tangent to  $\Gamma_R$  in the point  $M_0$  and is obtained as intersection of the sphere  $S$  with the plane  $\Pi_r$  at distance  $b$  from  $O$ .

Be  $O_\alpha$  the centre of the circle  $\Gamma_r$ . The direction  $OO_\alpha$  makes with the plane  $\Pi_R$  an angle  $\theta$ . Implicitly, the angle between the planes  $\Pi_R$  and  $\Pi_r$  is  $\pi/2 - \theta$ .

The points of the circle  $\Gamma_r$ , inclusively  $M_0$ , describe identical equatorial spherical hypocycloids, however dephased in relation to a certain direction from the plane  $\Pi_R$ . There ensues a particular orientation may be adopted that should ensure the simplest expression of the equatorial spherical

sferice ecuatoriale descrisă de punctul  $M_0$ . Sistemul  $Oxyz$  care corespunde acestei cerințe este caracterizat prin aceea că axa  $Ox$  conține punctul  $M_0$  și că planul  $xOy$  este cuprins în planul  $\Pi_R$ .

### 3. Ecuația hipocicloidei sferice ecuatoriale

Pentru scrierea ecuației hipocicloidei sferice ecuatoriale se impune determinarea coordonatelor parametrice ale punctului generator.

Hipociclopedia sferică ecuatorială se obține cinematic ca urmare a rostogolirii fără alunecare a cercului  $\Gamma_r$ , de centru  $O_\alpha$ , peste cercul  $\Gamma_R$ . În acest timp axa  $OO_\alpha$  se rotește în jurul axei  $Oz$  cu unghiul  $\alpha = \alpha(t)$ , măsurat ca proiecție în planul  $xOy$ .

Coordonatele parametrice ale punctului  $M$  se pot obține ca sumă a coordonatelor parametrice ale punctului  $O_\alpha$ , scrise în sistemul de coordonate principal  $Oxyz$ , și ale punctului  $M$ , scrise într-un sistem de coordonate secundar, cu originea în  $O_\alpha$  și cu axele paralele cu axele sistemului de coordonate  $Oxyz$ .

Pentru un caz oarecare razele cercurilor  $\Gamma_r$  și  $\Gamma_R$  sunt invariante. Este utilă definirea constantei:

$$k = R/r. \quad (1)$$

Unghiul  $\theta$  este constant și dependent de  $k$ :

$$\sin \theta = \frac{r}{R} = \frac{1}{k}. \quad (2)$$

Tot constante sunt și mărimile:

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{k^2 - 1}, \quad (3)$$

$$b = \sqrt{R^2 - r^2} = r \cdot \sqrt{\frac{R^2}{r^2} - 1} = r \cdot \sqrt{k^2 - 1}. \quad (4)$$

În sistemul de coordonate principal  $Oxyz$ , coordonatele punctului  $O_\alpha(x_\alpha; y_\alpha; z_\alpha)$  sunt:

$$\begin{cases} x_\alpha = b \cdot \cos \theta \cdot \cos \alpha \\ y_\alpha = b \cdot \cos \theta \cdot \sin \alpha \\ z_\alpha = b \cdot \sin \theta \end{cases} \quad (5)$$

Ca urmare a rostogolirii fără alunecare a cercului rulant  $\Gamma_r$  peste cercul bază  $\Gamma_R$ , la un moment dat acestea ajung tangente într-un punct  $M_\alpha \in \Gamma_R$ ,  $\angle M_0 O M_\alpha = \alpha$ , iar punctul  $M_0$  ajunge într-o poziție  $M_\beta \in \Gamma_R$ ,  $\angle M_\alpha O_\alpha M_\beta = \beta$ .

Rostogolirea fără alunecare se exprimă prin egalitatea arcelor de cerc  $M_0 M_\alpha \in \Gamma_R$  și  $M_\alpha M_\beta \in \Gamma_r$ :

hypocycloid described by the point  $M_0$ . The system  $Oxyz$  corresponding to this requirement is characterized through the fact that the axis  $Ox$  contains the point  $M_0$  and that the plane  $xOy$  is comprised in the plane  $\Pi_R$ .

### 3. Equation of the equatorial spherical hypocycloid

In order to write the equation of the equatorial spherical hypocycloid, the parametric coordinates of the generating point must be determined.

The equatorial spherical hypocycloid is cinematically obtained following the rolling without sliding of the circle  $\Gamma_r$ , of centre  $O_\alpha$ , over the circle  $\Gamma_R$ . Meanwhile the axis  $OO_\alpha$  rotates around the axis  $Oz$  with the angle  $\alpha = \alpha(t)$ , measured as projection in plane  $xOy$ .

The parametric coordinates of the point  $M$  may be obtained as sum of the parametric coordinates of  $O_\alpha$ , written in the main system of coordinates  $Oxyz$ , and of the point  $M$ , written in a secondary system of coordinates, with the origin in  $O_\alpha$  and with the axes parallel to those of the system of coordinates  $Oxyz$ .

For a certain case, the rays of the circles  $\Gamma_r$  and  $\Gamma_R$  are invariants. Defining the constant is useful:

The angle  $\theta$  is constant and dependent on  $k$ :

The values are constant in their turn:

In the main system of coordinates  $Oxyz$ , the coordinates of the point  $O_\alpha(x_\alpha; y_\alpha; z_\alpha)$  are:

Following the rolling without sliding of the turning circle  $\Gamma_r$  over the base circle  $\Gamma_R$ , at a given moment they become tangent in a point  $M_\alpha \in \Gamma_R$ ,  $\angle M_0 O M_\alpha = \alpha$ , and the point  $M_0$  reaches a position  $M_\beta \in \Gamma_R$ ,  $\angle M_\alpha O_\alpha M_\beta = \beta$ .

The rolling without sliding expresses through the arcs of circle  $M_0 M_\alpha \in \Gamma_R$  and  $M_\alpha M_\beta \in \Gamma_r$  equality:

$$\overline{M_0 M_\alpha} = \alpha \cdot R = \overline{M_\alpha M_\beta} = \beta \cdot r, \quad (6)$$

de unde rezultă:

where from:

$$\beta = \alpha \cdot \frac{R}{r} = k \cdot \alpha. \quad (7)$$

Coordonatele punctului  $M_\beta(x_\beta; y_\beta; z_\beta)$  se scriu, într-o primă etapă, într-un sistem de coordonate  $O_\alpha x' y' z'$  asociat cercului  $\Gamma_r$ , figurile 2 și 3.

The coordinates of the point  $M_\beta(x_\beta; y_\beta; z_\beta)$  are written, in a first stage, in a system of coordinates  $O_\alpha x' y' z'$  associated to the circle  $\Gamma_r$ , figures 2 și 3.

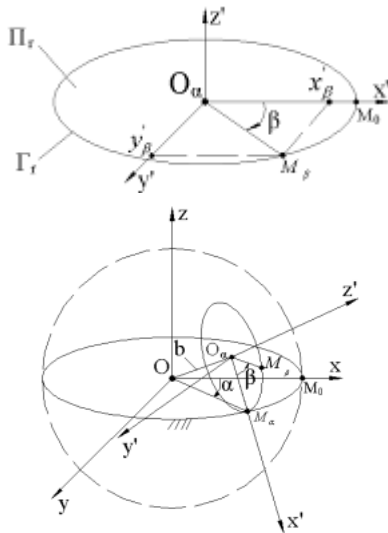


Figura 2. Sistemul de coordonate secundar  $O_\alpha x' y' z'$  asociat cercului rulant  $\Gamma_r$

Figure 2. Secondary system of coordinates  $O_\alpha x' y' z'$  associated to the turning circle  $\Gamma_r$

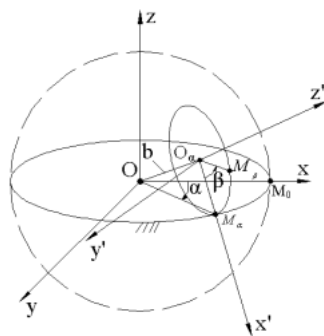


Figura 3. Poziția sistemului de coordonate  $O_\alpha x' y' z'$  în raport cu sistemul de coordonate principal

Figure 3. Position of the system of coordinates  $O_\alpha x' y' z'$  in relation to the principal system of coordinates

Planul  $x' O_\alpha y'$  este cuprins în planul  $\Pi_r$ , iar axa  $O_\alpha x'$  se suprapune cu direcția  $O_\alpha M_\alpha$ . În acest sistem de coordonate secundar, punctul  $M_\beta$  are coordonatele:

Plane  $x' O_\alpha y'$  is comprised in plane  $\Pi_r$  and the axis  $O_\alpha x'$  overlaps the direction  $O_\alpha M_\alpha$ . In this secondary system of coordinates, point  $M_\beta$  has the coordinates:

$$\begin{cases} x'_\beta = r \cdot \cos(-\beta) = r \cdot \cos\beta \\ y'_\beta = r \cdot \sin(-\beta) = -r \cdot \sin\beta \\ z'_\beta = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Pentru a obține coordonatele punctului  $M_\beta$  scrise într-un sistem de coordonate cu axele paralele cu cele ale sistemului de coordonate principal  $Oxyz$  se face o dublă rotire a sistemului de coordonate  $O_\alpha x' y' z'$ .

To obtain the coordinates of point  $M_\beta$  written in a system of coordinates with parallel axes to the main system of coordinates  $Oxyz$  a double rotation of the system of coordinates  $O_\alpha x' y' z'$  is done.

Într-o primă etapă, sistemul  $O_\alpha x' y' z'$  se rotește față de axa  $O_\alpha y'$  cu unghiul  $\pi/2-\theta$ . Se obține sistemul de coordonate  $O_\alpha x'' y'' z''$ , figura 4, al cărui plan  $O_\alpha x'' y''$  este paralel cu planul  $Oxy$ , figura 5.

In a first stage, the system  $O_\alpha x' y' z'$  rotates against the axis  $O_\alpha y'$  with the angle  $\pi/2-\theta$ . The system of coordinates  $O_\alpha x'' y'' z''$  is obtained; figure 4, whose plane  $O_\alpha x'' y''$  is parallel to the plane  $Oxy$ , figure 5.

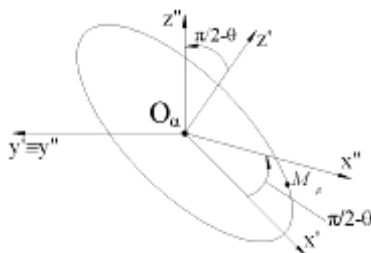


Figura 4. Sistemul de coordonate  $O_\alpha x'' y'' z''$

Figure 4. System of coordinates  $O_\alpha x'' y'' z''$

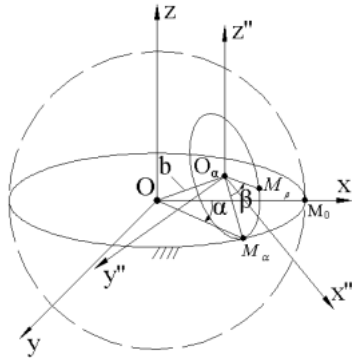


Figura 5. Poziția sistemului de coordonate  $O_\alpha x'' y'' z''$  în raport cu sistemul de coordonate principal  
 Figure 5. Position of the system of coordinates  $O_\alpha x'' y'' z''$  against the main system of coordinates

În acest sistem punctul  $M_\beta$  are coordonatele:

In this system, the point  $M_\beta$  has the coordinates:

$$\begin{cases} x_\beta'' = x_\beta' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + z_\beta' \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r \cdot \cos\beta \cdot \sin\theta \\ y_\beta'' = y_\beta' = -r \cdot \sin\beta \\ z_\beta'' = -x_\beta' \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + z_\beta' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -r \cdot \cos\beta \cdot \cos\theta \end{cases} \quad (9)$$

Pentru a obține paralelism între axele sistemului secundar și axele sistemului principal  $Oxyz$ , sistemul de coordonate  $O_\alpha x'' y'' z''$  se rotește în jurul axei  $O_\alpha z''$  cu un unghi  $\alpha$ . Se obține astfel sistemul de coordonate  $O_\alpha x''' y''' z'''$ , figura 6, în raport cu care punctul  $M_\beta$  are coordonatele:

So as to obtain the parallelism between the axes of the secondary and principal system  $Oxyz$ , the system of coordinates  $O_\alpha x'' y'' z''$  rotates round the axis  $O_\alpha z''$  with an angle  $\alpha$ . There is obtained thereby the system of coordinates  $O_\alpha x''' y''' z'''$ , figure 6, where to the point  $M_\beta$  has the coordinates:

$$\begin{cases} x_\beta''' = x_\beta'' \cdot \cos\alpha - y_\beta'' \cdot \sin\alpha = r \cdot \cos\beta \cdot \sin\theta \cdot \cos\alpha + r \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha = \\ = r \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\theta + \sin\alpha \cdot \sin\beta) \\ y_\beta''' = x_\beta'' \cdot \sin\alpha + y_\beta'' \cdot \cos\alpha = r \cdot \cos\beta \cdot \sin\theta \cdot \sin\alpha - r \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha = \\ = r \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\theta - \cos\alpha \cdot \sin\beta) \\ z_\beta''' = z_\beta'' = -r \cdot \cos\beta \cdot \cos\theta \end{cases} \quad (10)$$

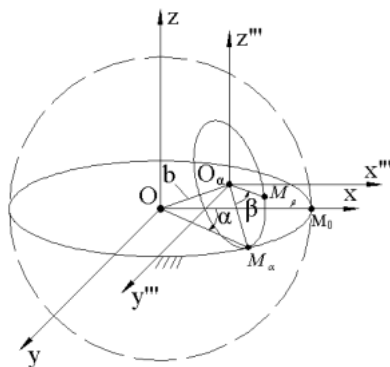


Figura 6. Paralelismul sistemului de coordonate  $O_\alpha x''' y''' z'''$  față de sistemul de coordonate principal  $Oxyz$   
 Figure 6. Parallelism of the system of coordinates  $O_\alpha x''' y''' z'''$  in relation to the main system  $Oxyz$

În sistemul de coordonate principal  $Oxyz$ , coordonatele punctului generator  $M_\beta(x_\beta; y_\beta; z_\beta)$  se obțin ca sumă a coordonatelor punctului  $O_\alpha(x_\alpha; y_\alpha; z_\alpha)$ , scrise în sistemul de coordonate  $Oxyz$ , și ale punctului  $M_\beta(x_\beta''; y_\beta''; z_\beta'')$  scrise în sistemul de coordonate  $O_\alpha x''' y''' z'''$ :

In the principal system of coordinates  $Oxyz$ , the generating point coordinates  $M_\beta(x_\beta; y_\beta; z_\beta)$  are obtained as sum of the coordinates of the point  $O_\alpha(x_\alpha; y_\alpha; z_\alpha)$ , written in the system of coordinates  $Oxyz$ , and of the point  $M_\beta(x_\beta''; y_\beta''; z_\beta'')$  written in the system of coordinates  $O_\alpha x''' y''' z'''$ :

$$\begin{cases} x_{\beta} = x_{\alpha} + x_{\beta}''' = b \cdot \cos \theta \cdot \cos \alpha + r \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \theta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) \\ y_{\beta} = y_{\alpha} + y_{\beta}''' = b \cdot \cos \theta \cdot \sin \alpha + r \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \theta - \cos \alpha \cdot \sin \beta) \\ z_{\beta} = z_{\alpha} + z_{\beta}''' = b \cdot \sin \theta - r \cdot \cos \beta \cdot \cos \theta \end{cases} \quad (11)$$

Exprimate doar în funcție de parametrul  $\alpha$  și de constanta  $k$ , coordonatele punctului M generator de hipocicloidă sferică ecuatorială sunt:

Only expressed as a function of the parameter  $\alpha$  and of the constant  $k$ , the coordinates of the point M generating the equatorial spherical hypocycloid are:

$$\begin{cases} x_{\beta} = r \cdot \sqrt{k^2 - 1} \cdot \frac{1}{k} \cdot \sqrt{k^2 - 1} \cdot \cos \alpha + r \cdot \left[ \cos \alpha \cdot \cos(k \cdot \alpha) \cdot \frac{1}{k} + \sin \alpha \cdot \sin(k \cdot \alpha) \right] = \\ = \frac{r}{k} \cdot \left[ (k^2 - 1) \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \cos(k \cdot \alpha) + k \cdot \sin \alpha \cdot \sin(k \cdot \alpha) \right] \\ y_{\beta} = r \cdot \sqrt{k^2 - 1} \cdot \frac{1}{k} \cdot \sqrt{k^2 - 1} \cdot \sin \alpha + r \cdot \left[ \sin \alpha \cdot \cos(k \cdot \alpha) \cdot \frac{1}{k} - \cos \alpha \cdot \sin(k \cdot \alpha) \right] = \\ = \frac{r}{k} \cdot \left[ (k^2 - 1) \cdot \sin \alpha + \sin \alpha \cdot \cos(k \cdot \alpha) - k \cdot \cos \alpha \cdot \sin(k \cdot \alpha) \right] \\ z_{\beta} = \frac{r}{k} \cdot \sqrt{k^2 - 1} \cdot [1 - \cos(k \cdot \alpha)] \end{cases} \quad (12)$$

acestea formând în fapt ecuațiile parametrice ale hipocicloidei în discuție.

they forming in fact the parametric equations of the hypocycloid under discussion.

Culisoarele unui automat hipocicloidă sferic execută, ca și cele ale automatelor hipocicloidale plane, mișcări de translație. Axa unui culisor trebuie să conțină punctul de întoarcere al hipocicloidei sferice normale descrisă de punctul generator de traiectorie, iar direcția de deplasare a culisorului este de preferat să fie chiar tangenta la hipocicloidă sferică în punctul de întoarcere al acesteia.

The slide blocks of spherical hypocycloid automatic machines, as those of the plane hypocycloid automatic machines execute translation motions. A slide block axis must contain the normal spherical hypocycloid spinode, described by the trajectory generating point, and the slide block shift direction should well be the tangent to the spherical hypocycloid in its spinode.

În cazul hipocicloidelor sferice ecuatoriale, tangenta în punctul de întoarcere este perpendiculară pe planul ecuatorial, deci față de sistemul de coordonate principal Oxyz este paralelă cu axa Oz.

In the case of equatorial spherical hypocycloids, the tangent to the spinode is perpendicular on the equatorial plane; therefore against the main system of coordinates, Oxyz is parallel with the axis Oz.

Cursa unui culisor este întotdeauna mai mică decât  $z_{\max}$ , culisorul fiind antrenat de piesa ce materializează punctul generator de hipocicloidă doar pentru o cursă  $s(\alpha_0) = h_0 < z_{\max}$ ,  $h_0 > h_N$ , unde  $h_N$  este cursa nominală sub sarcină.

A block slide course is always smaller than  $z_{\max}$ , the slide block being driven by the piece materializing the point generating the hypocycloid for one single course  $s(\alpha_0) = h_0 < z_{\max}$ ,  $h_0 > h_N$ , where  $h_N$  is the nominal course under the load.

Ca urmare, legea de mișcare a culisoarelor unui automat hipocicloidă spațial ecuatorial este dată doar de variația coordonatei  $z(\alpha)$  a punctului generator de traiectorie, pentru  $\alpha \in [-\alpha_0; +\alpha_0]$ :

Consequently, the law of motion of an equatorial spherical hypocycloid automatic machine slide blocks is only given by the coordinate variation  $z(\alpha)$  in the trajectory generating point, for  $\alpha \in [-\alpha_0; +\alpha_0]$ :

$$s(\alpha) = z(\alpha) = \frac{r}{k} \cdot \sqrt{k^2 - 1} \cdot [1 - \cos(k \cdot \alpha)]. \quad (13)$$

Este de subliniat marea asemănare a acestei legi de mișcare cu cea a culisoarelor preselor mecanice

The high similitude between this law of motion and the one of the power presses driven through the

antrenate prin mecanism manivelă-bielă-culisor fără excentricitate [4].

Expresiile pentru viteza și accelerația unui culisor al unui automat hipocicloidal sferic ecuatorial se obțin prin derivare în raport cu timpul a expresiei de spațiu:

$$v(\alpha) = \frac{ds(\alpha)}{dt} = \frac{dz(\alpha)}{dt} = \frac{dz(\alpha)}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega \frac{r\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \sin 2\alpha, \quad (14)$$

$$a(\alpha) = \frac{dv(\alpha)}{dt} = \frac{dv(\alpha)}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega^2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \cdot \cos \alpha, \quad (15)$$

unde  $\omega$  este viteza unghiulară a arborelui principal al automatului hipocicloidal sferic.

crank-rod-slide block mechanism without eccentricity should be emphasized [4].

The expressions for the speed and for the acceleration of an equatorial spherical hypocycloidal automatic machine are obtained through derivation in relation with time, of the space expression:

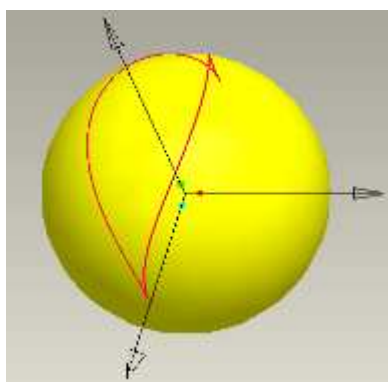
where  $\omega$  is the angular speed of the principal shaft of the spherical hypocycloidal automatic machine.

#### 4. Cazuri particulare

De interes pentru aplicațiile tehnice sunt hipocicloidele unicursale [5], la care constanta  $k$  aparține mulțimii numerelor raționale pozitive. Se are în vedere cu prioritate cazul pentru care  $k = 2$ . Ecuațiile parametrice ale acestei hipocicloide spațiale sferice particulare sunt:

$$\begin{cases} x_{k=2} = \frac{r}{2} \cdot [3 \cos \alpha + \cos \alpha \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2 \alpha) + 4 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha] = r \cdot \cos \alpha \cdot (2 + \sin^2 \alpha) \\ y_{k=2} = \frac{r}{2} \cdot [3 \cdot \sin \alpha + \sin \alpha \cdot (2 \cdot \cos^2 \alpha - 1) - 4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha] = r \cdot \sin \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha) \\ z_{k=2} = \frac{r \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot [1 - \cos(2 \cdot \alpha)] \end{cases} \quad (16)$$

O imagine sugestivă a hipocicloidei sferice ecuatoriale se prezintă în figura 7. Analiza altor cazuri particulare vor face obiectivul unor noi lucrări.



#### 4. Special cases

The unicursal hypocycloids are of interest for technical applications [5], whereto the constant  $k$  pertains to the positive rational number set. The case for whom  $k = 2$  is pre-eminently envisaged. The parametric equations of this special spherical spatial hypocycloid are:

A suggestive image of the equatorial spherical hypocycloid is shown in figure 7. Other papers will tackle the analysis of other particular cases.

Figura 7. Aspectul unei hipocicloide sferice ecuatoriale cu două bucle, normală  
Figure 7. The appearance of a spherical equatorial hypocycloid with two loops, normal

#### 5. Concluzii

Există automate hipocicloidale plane, destinate unor operații de refulare sau ștanțare. Acestea constituie o contribuție deosebită a cercetărilor desfășurate în cadrul Universității Transilvania din Brașov la extinderea clasei mașinilor-unelte.

#### 5. Conclusions

There are plane hypocycloidal automatic machines, destined for pressing or forming operations. They constitute a special contribution of the researches developed within Transilvania University of Brașov towards expanding the class of the machine tools.

S-a identificat posibilitatea dezvoltării automatelor hipocicloidale cu o nouă subclasă, automate hipocicloidale spațiale, cele sferice fiind un caz particular favorabil. Pentru conceperea acestor mașini este nevoie de elaborarea unui model matematic adecvat. Lucrarea abordează cazul particular al automatelor sferice ecuatoriale. La acestea legea de mișcare este dată de o hipocicloidă sferică ecuatorială. În practică sunt preferate hipocicloidele normale cu număr redus de puncte de întoarcere.

Culisoarele automatelor hipocicloidale preiau doar deplasarea în lungul tangentei în punctul de întoarcere, adică legea lor de mișcare este dată doar de variația coordonatei  $z(\alpha)$  a punctului generator de traiectorie. Sunt date expresiile parametrilor cinematici ce caracterizează mișcările culisoarelor.

Este abordat, ca exemplu, și cazul particular al hipocicloidelor ecuatoriale sferice cu două bucle.

The development possibility of hypocycloidal automatic machines with a new sub-class is identified, spatial, the spherical being a favorable particular case. So as to conceive these machines, an adequate mathematic model must be elaborated. The paper deals with the special case of the equatorial spherical automatic machines. In these, the law of motion is given by an equatorial spherical hypocycloid. In practice, there are preferred the normal hypocycloids with a small spinode number.

Hypocycloidal automatic machine slide blocks only take over the shift along the tangent in the spinode, this way their law of motion is only given by the variation of the coordinate  $z(\alpha)$  of the trajectory generating point. Cinematic parameter expressions characterizing the slide block shifts are given.

The special case of the two-loomed equatorial spherical hypocycloids is dealt with, as example.

## References

1. Cioară, R.: *Automat de presare la rece (Automatic Press for Cold Forming)*. RO patent no. 109825 B1, Int. Cl. B 21 J7/16
2. Cioară, R.: *Contribuții teoretice și experimentale privind cinematica, dinamica și construcția unui mecanism executor principal cu traiectorie hipocicloidă utilizat la automatele de presare de mare productivitate (Theoretical and experimental contributions to the kinematics, dynamics and construction of a main executive mechanism with hypocycloid trajectory used for high productivity automatic presses)*. PhD Thesis. Transilvania University of Brașov, 1998 (in Romanian)
3. Murgulescu, Elena, et al.: *Geometrie analitică și diferențială (Analytic and differential geometry)*. Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1970 (in Romanian)
4. Cioară, R.: *Mașini-unelte de prelucrat prin deformare (Machine tools for plastic deformation)*. Ed. Universității Transilvania Brașov, ISBN 978-973-655-598-306-2, Brașov, 2008 (in Romanian)
5. \*\*\*: <http://www.chronomath.com> Accessed: 2010-08-12

## Acknowledgements

1. This paper is supported by the Sectoral Operational Programme Human Resources Development (SOP HRD), financed from the European Social Fund and by the Romanian Government under the contract number POSDRU/88/1.5/S/59321.

2. Preparation of this work would not have been possible without the kind support from PhD.Eng. Romeo Cioară, professor at Transilvania University of Brasov.

Lucrare primită în august 2010

Received in August 2010