

MODELAREA ANALITICĂ A ROTORILOR DE TURBOSUFLANTĂ

ANALYTICAL MODELING OF TURBOCHARGER ROTORS

Cosmin Constantin BORICEAN, Ion BALCU, Ioan ROȘCA

Transilvania University of Brasov, Romania

Rezumat. Dinamica rotorilor a fost și este un domeniu cu largă aplicabilitate la toate categoriile de mașini rotative. Turbosuflanta face și ea parte din categoria de mașinilor rotative de înaltă precizie. Principalul element al turbosuflantei este reprezentat de rotorul acesteia, susținut de două categorii de lagăre: clasice-hidrodinamice, moderne-cu rostogolire (rulmenți). Performanțele pe care turbosuflantele sunt capabile să le furnizeze sunt strâns legate de fenomenele dinamice care au loc la nivelul rotorului acesteia. Fie că este vorba de încovoieri apărute în urma fenomenelor vibraționale care acționează asupra lui sau de mase neechilibrate și defectele de montaj, rotorul de turbosuflantă are o precesie care prin natura ei poate să furnizeze suficiente date despre fiabilitatea acesteia și performanțele de supraalimentare pe care poate să le furnizeze.

În cadrul acestei lucrări s-au evidențiat aspecte legate de modelarea matematică a rotorilor de turbosuflantă, împreună cu câteva aspecte privind stabilitatea dinamică a acestora, stabilitate influențată de parametrii reprezentați de: masă, excentricitate, rigiditate și amortizare.

Cuvinte cheie: turbosuflantă, dinamica rotorilor, lagăre, rigiditate, amortizare

1. Introducere

În general modelarea matematică a rotorilor de turbosuflantă pleacă de la ipotezele simplificatoare, utilizate la modelele clasice de rotor: Jeffcot-Laval și Stodola-Green.

Consultând literatura de specialitate s-a constatat că modelarea analitică a rotorilor de turbosuflantă ține cont de următoarele ipoteze simplificatoare [4]:

- roțile compresorului respectiv turbinei sunt reduse la elemente de mase concentrate sub formă de disc;
- arborii sunt reduși la elemente de tronsoane cu lungime egală, fiind reprezentate de elemente de tip Timoshenko și Euler-Bernoulli;
- lagărele sunt reprezentate de elemente de tip rigiditate și amortizare dispuse cu un defazaj de 90° pe grindă;
- filmul de ulei la nivelul lagărelor este redus la modele liniarizate care țin cont de amortizarea oferită sistemului.

Abstract. Rotordynamics was and still is a high applicability field to all categories of rotating machines. The turbocharger is part of high precision rotating machines. Its rotor, sustained by two categories of bearings, represents the main part of the turbocharger: classical ones use hydrodynamic bearings; modern ones use hybrid rolling bearings with ceramic rolling elements. The performances that turbochargers are capable of are closely related to dynamical phenomena that appear at the level of its rotor. Even if we talk about vibration behaviour, or unbalanced masses and assembly defects, the turbocharger rotor has a high precision execution, and by monitoring its behaviour, we are capable to obtain important data sets, which could predict its durability and also charging performances.

The paper work is focused on highlighting some aspects related to mathematical modeling of turbocharger rotors and also in highlighting some aspects related to rotor dynamic stability, influenced by parameters related to: mass; eccentricity, rigidity and damping effects.

Key words: turbocharger, rotordynamics, bearings, rigidity, damping

1. Introduction

Generally speaking the mathematical modeling of turbochargers rotors is based on the simplifying assumptions that are used on classical rotors models: Jeffcott-Laval and Stodola-Green.

Consulting the field bibliography it had been found that analytical modeling of turbochargers rotors take into consideration the following simplifying assumptions [4]:

- the compressor wheel respectively the turbine wheel are reduced to lumped mass element of disk shape;
- the shafts are reduced to equal size length elements; being represented by Timoshenko and Euler-Bernoulli shaft element;
- the bearings are represented by rigidity and damping elements placed with 90° phase shift on the shaft element;
- the oil fluid film is reduced to linearized analytical models that are defined by damping effect.

2. Ecuația de mișcarea a rotorului de turbosuflantă

În cadrul acestei lucrări s-a considerat un rotor clasic de turbosuflantă susținut de două lagăre hidrodinamice, model prezentat în figura 1.

2. The motion equation of the turbocharger rotor

In this paper work it was considered a classical turbocharger rotor sustained by two hydrodynamic bearings, model presented in figure 1.

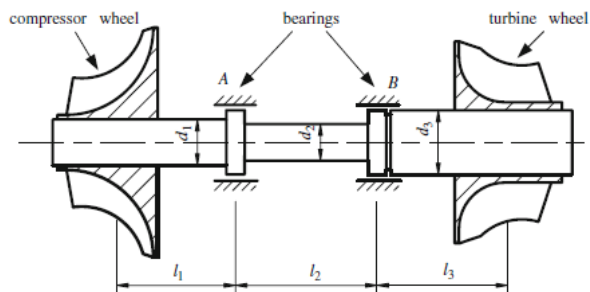


Figura 1. Rotor simplu cu lagăre hidrodinamice [2]
Figure 1. Simple rotor with hydrodynamic bearings [2]

În vederea modelării matematice a rotorului considerat în figura 1, racurgând la ipotezele simplificatoare [2], s-a definitivat un model geometric convenabil pentru realizarea modelării matematice, prezentat în figura 2.

In order to model the considered turbocharger model, presented in figure 1, using the simplifying assumptions [2], it has been defined the convenient geometric model used in mathematical modelling, presented in figure 2.

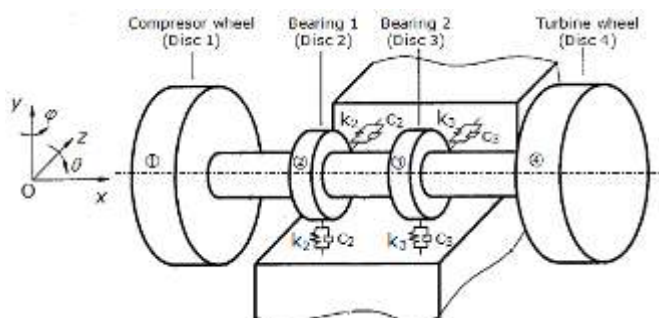


Figura 2. Model simplificat de rotor [2]
Figure 2. Rotor discrete model [2]

Elementele discrete utilizate în modelul din figura 2 se împart în două categorii: elemente de tip arbore și elemente de tip disc. Pentru o corectă reprezentare a modelului analitic s-au păstrat aceleași proprietăți de masă și material ca și în cazul modelului efectiv, prezentat în figura 3.

The discrete elements used in the model presented in figure 2 are divided in two categories: shaft elements and disk elements. For an even representation of the mathematical model it were maintained the same mass and material properties as in the case of the real scale model, presented in figure 3.



Figura 3. Rotorul de turbosuflantă studiat
Figure 3. Real scale turbocharger rotor

Pentru a cupla între ele elementele de tip disc și arbore s-au utilizat ecuații matematice construite pe ipoteza că fenomenele și condițiile din partea stângă a tronsonului de tip arbore sunt similare cu cele impuse la nivelul tronsonului din partea dreaptă a discului.

For coupling the shaft and disk elements it were used mathematic equations build on the basic hypothesis, that conditions and phenomena that occur at the left end of the shaft element are the same with the ones that occur at the right side of the disk element.

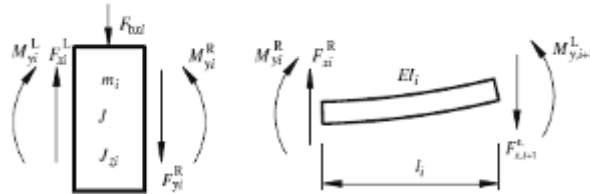


Figura 4. Elementele de tip disc și arbore [2]
Figure 4. Disk and shaft element [2]

Fiecare element considerat are patru grade de libertate: două translații corespunzătoare axelor Oy și Oz, și două rotații ϕ și ψ corespunzătoare axelor orizontale și verticale (Oy și Oy).

Each of the considered elements has four degrees of freedom (4 DOF): two translations corresponding to Oy and Oz axis, respectively two rotations ϕ and ψ corresponding to the horizontal and vertical axis (Oy and Oz).

De menționat faptul că modelul considerat nu are deplasări axiale în lungul axei Ox.

It is to be mentioned that the considered model has no axial displacements along the Ox axis.

Pe lângă proprietățile de masă și material, elementelor considerate în modelul prezentat în figura 2 li s-au atribuit și proprietăți care țin de rigiditate și amortizare.

Besides the mass and material properties, assigned to the elements forming the model presented in figure 2 it were assigned also the properties that are related to rigidity and damping.

Notând cu m_i - masa; \ddot{y}_i - accelerația; l_i - lungime element; unde $i=1..4$ corespunzătoare elementelor prezentate în figura 2; E - modulul de elasticitate; I_i - moment de inerție; Φ_i - rotația după axa Oz; Ψ_i - rotația după axa Oy; e_i - excentricitatea; g - accelerația gravitațională; ω - viteza unghiulară a rotorului; c_0 - amortizarea la nivelul lagărelor; K - rigiditatea lagărelor, ecuațiile care modelează fenomenele dinamice care au loc la nivelul rotorului de turbosuflantă sunt [2, 3, 5]:

Noting with m_i - mass; \ddot{y}_i - acceleration; l_i - element length; where $i=1..4$ corresponding to elements presented in figure 2; E - elasticity modulus; I_i - inertial moment; Φ_i - spin over Oz axis; Ψ_i - spin over Oy axis; e_i - eccentricity; g - gravitational acceleration; ω - rotor angular velocity; c_0 - bearing damping; K - bearing stiffness, equations that govern the dynamical phenomena that occur at the level of the turbocharger rotor are as follows [2, 3, 5]:

$$m_1 \ddot{y}_1 + \frac{12EI_1}{l_1^3} y_1 - \frac{6EI_1}{l_1^3} y_2 - \frac{6EI_1}{l_1^2} \phi_1 - \frac{6EI_1}{l_1^2} \phi_2 = -m_1 g + m_1 e_1 \omega^2 \sin \omega t ; \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + c_0 \dot{y}_2 + (K \frac{12EI_1}{l_1^3} + \frac{12EI_2}{l_2^3}) y_2 - \frac{12EI_1}{l_1^3} y_1 - \frac{12EI_2}{l_2^3} y_2 - \frac{12EI_2}{l_2^3} y_3 + \frac{6EI_1}{l_1^2} \phi_1 + (\frac{6EI_1}{l_1^2} - \frac{6EI_2}{l_2^2}) \phi_2 - \frac{6EI_2}{l_2^2} \phi_3 = -m_2 g + m_2 e_2 \omega^2 \sin \omega t \quad (2)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + c_0 \dot{y}_3 + (K \frac{12EI_2}{l_2^3} + \frac{12EI_3}{l_3^3}) y_3 - \frac{12EI_2}{l_2^3} y_2 - \frac{12EI_3}{l_3^3} y_4 - \frac{6EI_2}{l_2^2} \phi_2 + (\frac{6EI_2}{l_2^2} - \frac{6EI_3}{l_3^2}) \phi_3 - \frac{6EI_3}{l_3^2} \phi_4 = -m_3 g + m_3 e_3 \omega^2 \cos \omega t \quad ; \quad (3)$$

$$m_4 \ddot{y}_4 + \frac{12EI_3}{l_3^3} y_4 - \frac{12EI_3}{l_3^3} y_3 - \frac{6EI_3}{l_2^2} \phi_3 + \frac{6EI_3}{l_2^2} \phi_4 = -m_4 g + m_4 e_4 \omega^2 \sin \omega t ; \quad (4)$$

$$m_4 \ddot{z}_1 + \frac{12EI_1}{l_1^3} z_1 - \frac{12EI_1}{l_1^3} z_2 + \frac{6EI_1}{l_1^2} \psi_1 + \frac{6EI_1}{l_1^2} \psi_2 = m_1 e_1 \omega^2 \sin \omega t ; \quad (5)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 + c_0 \dot{z}_2 + (K + \frac{12EI_1}{l_1^3} + \frac{12EI_2}{l_2^3}) z_2 - \frac{12EI_1}{l_1^3} z_1 - \frac{6EI_1}{l_1^2} \psi_1 - \frac{6EI_1}{l_2^2} \psi_2 - \frac{12EI_2}{l_2^3} z_3 + \frac{6EI_2}{l_2^2} \psi_2 - \frac{6EI_2}{l_2^2} \psi_3 = m_2 e_2 \omega^2 \cos \omega t \quad (6)$$

$$m_3 \ddot{z}_3 + c_0 \dot{z}_3 + (K + \frac{12EI_2}{l_2^3} + \frac{12EI_3}{l_3^3}) z_3 - \frac{12EI_2}{l_2^3} z_2 - \frac{12EI_3}{l_3^3} z_4 - \frac{6EI_2}{l_2^2} \psi_2 - \frac{12EI_2}{l_2^3} z_3 + (\frac{6EI_3}{l_2^2} - \frac{6EI_2}{l_2^2}) \psi_3 + \frac{6EI_3}{l_2^2} \psi_4 = m_3 e_3 \omega^2 \cos \omega t \quad (7)$$

$$m_4 \ddot{z}_4 + \frac{12EI_3}{l_3^3} z_4 - \frac{12EI_3}{l_3^3} z_3 - \frac{6EI_3}{l_2^2} \psi_4 = m_4 e_4 \omega^2 \sin \omega t ; \quad (8)$$

$$J_{y1} \ddot{\Psi}_1 + \omega J_{x1} \dot{\Phi}_1 + \frac{6EI_1}{l_1^2} \psi_1 + \frac{4EI_1}{l_1} \psi_1 - \frac{2EI_1}{l_1} \psi_2 = 0 ; \quad (9)$$

$$J_{y2} \ddot{\Psi}_2 + c_0 \dot{\Psi}_2 - \omega J_{x2} \dot{\Phi}_2 + \frac{6EI_1}{l_1^2} z_1 + (\frac{6EI_2}{l_2^2} - \frac{6EI_1}{l_1^2}) z_2 - \frac{6EI_2}{l_2^2} z_3 + \frac{2EI_1}{l_1} \psi_1 + (\frac{4EI_1}{l_1} - \frac{4EI_2}{l_2}) \psi_2 + \frac{2EI_2}{l_2} \psi_3 = 0 \quad (10)$$

$$J_{y3} \ddot{\Psi}_3 + c_0 \dot{\Psi}_3 - \omega J_{x3} \dot{\Phi}_3 + \frac{6EI_2}{l_2^2} z_2 + (\frac{6EI_3}{l_2^2} - \frac{6EI_2}{l_2^2}) z_3 + \frac{2EI_2}{l_2} \psi_2 + (\frac{4EI_2}{l_2} + \frac{4EI_3}{l_3}) \psi_3 - \frac{6EI_3}{l_2^2} z_4 + \frac{2EI_3}{l_3} \psi_4 = 0 \quad (11)$$

$$J_{y4} \ddot{\Phi}_4 + \omega J_{x1} \dot{\Psi}_1 + \frac{6EI_3}{l_2^2} z_3 - \frac{6EI_3}{l_2^2} z_4 + \frac{2EI_3}{l_3} \psi_3 - \frac{4EI_3}{l_3} \psi_4 = 0 \quad (12)$$

$$J_{z1} \ddot{\Phi}_1 + \omega J_{x1} \dot{\Psi}_1 + \frac{6EI_1}{l_1^2} y_2 + \frac{6EI_1}{l_1^2} y_1 - \frac{4EI_1}{l_1} \phi_1 + \frac{2EI_1}{l_1} \phi_2 = 0 ; \quad (13)$$

$$J_{z2} \ddot{\Phi}_2 + c_0 \dot{\Phi}_2 - \omega J_{x2} \dot{\Psi}_2 + \frac{6EI_2}{l_2^2} y_3 - \frac{6EI_1}{l_1} y_1 + (\frac{6EI_1}{l_1^2} - \frac{6EI_2}{l_2^2}) y_2 + (\frac{4EI_2}{l_2} + \frac{4EI_1}{l_1}) \phi_2 + \frac{2EI_2}{l_2} \phi_3 + \frac{2EI_1}{l_1} \phi_1 = 0 \quad (14)$$

$$J_{z3} \ddot{\Phi}_4 + c_0 \dot{\Phi}_4 + \omega J_{x4} \dot{\Psi}_4 + \frac{6EI_3}{l_2^2} y_3 + \frac{6EI_3}{l_2^2} y_4 + \frac{2EI_3}{l_3} \phi_3 - \frac{4EI_3}{l_3} \phi_4 = 0. \quad (15)$$

$$J_{z3}\ddot{\Phi}_3 + c_0\dot{\Phi}_3 + \omega J_{x3}\dot{\Psi}_3 - \frac{6EI_2}{l_2^2}y_2 + \left(\frac{6EI_2}{l_2^2} - \frac{6EI_3}{l_3^2}\right)y_3 + \frac{6EI_3}{l_3^2}y_4 + \frac{2EI_2}{l_2}\phi_2 + \left(\frac{4EI_2}{l_2} + \frac{4EI_3}{l_3}\right)\phi_3 + \frac{2EI_3}{l_3}\phi_4 = 0 \quad (16)$$

Ținând cont de aspectele menționate anterior următorul pas a fost analiza sistemului rotoric utilizând analiza în spațiul stărilor dată de ecuația (17) [6]:

$$M\ddot{\Delta} + C\dot{\Delta} + K\Delta = F \quad (17)$$

unde: M - reprezintă matricea globală a maselor fiecărui component al ansamblului rotoric; C - reprezintă matricea globală a amortizării; K - reprezintă matricea globală a rigidității; Δ - reprezintă vectorul deplasărilor; $\dot{\Delta}$ - reprezintă vectorul vitezei; $\ddot{\Delta}$ - reprezintă vectorul accelerațiilor.

Principala forță care acționează asupra rotorului este dată de forța centrifugă, care tinde să destabilizeze rotorul. Expresia forței centrifuge este dată de relația (18) [1]:

$$F = m \cdot e \cdot \omega^2 \cos \omega t ; \quad (18)$$

unde: m -masa rotorului; e -excentricitatea; ω -viteza unghiulară a rotorului.

3. Simularea modelului analitic

După realizarea aparatului matematic necesar modelării, cu ajutorul soft-ului Matlab-Simulink s-au realizat o serie de simulări în vederea observării comportamentului dinamic al rotorului de turbosuflantă considerat [5]. Având în vedere că s-au construit 16 ecuații generale care guvernează sistemul rotoric, cu ajutorul soft-ului Simulink s-a generat o analiză în spațiul stărilor, definite de 16 intrări și 16 semnale de ieșire observabile.

Pentru realizarea simulărilor privind stabilitatea dinamică a rotorului de turbosuflantă s-au variat rigiditățile la nivelul lagărelor. Exemple de comportament al rotorului se prezintă în figurile 5, 6 și 7.

Se observă faptul că rigiditatea lagărelor are o influență majoră asupra stabilității de mișcare a rotorului. Deși în practică o rigiditate mai mare corespunde unei fixări mai sigure a rotorului în lagăre, se poate observa faptul că cu cât valoarea rigidității depășește un prag optim, cu atât precesia rotorului devine instabilă cu un puternic caracter pulsator (figurile 6 și 7).

Taking into consideration the aspects mentioned above, the next step was to analyse the considered rotor system, using the steady-state models given by equation (17) [6]:

where: M -represents the mass matrix of entire elements that compose the rotor; C -represents the damping matrix; K -represents the stiffness matrix; Δ -represents the displacement vector; $\dot{\Delta}$ -represents the velocity vector; $\ddot{\Delta}$ -represents the acceleration vector.

The main force acting over the rotor-bearing system is given by the centrifugal force, that tends to destabilizes the considered mechanical system. The centrifugal force mathematical formula is given by equation (18) [1]:

where: m -rotor mass; e - eccentricity; ω - rotor angular speed.

3. Simulating the analytical model

After defining the mathematical model using Matlab-Simulink software it were accomplished several simulations in order to observe the dynamical behaviour of the considered rotor-bearing system [5]. Taking into consideration the fact that there are 16 general equations that govern the rotor system, using Matlab-Simulink software, it was established a steady-space analysis defined by 16 data entries and 16 output observable signals.

For accomplishing the simulations related to dynamical stability of the turbocharger rotor it were varied the stiffness of the bearings. Examples of behavior of the rotor shown in Figures 5, 6 and 7.

It could be observed that the bearing stiffness has a major influence over the rotor motion stability. Even if in practice a higher value of stiffness corresponds to a more secure rotor sustaining in bearings, it could be observed the fact that exceeding a optimal value of stiffness the rotor precession becomes unstable with a strong pulse feature (figures 6 and 7).

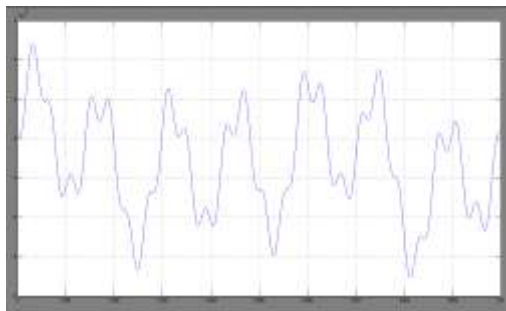


Figura. 5 Deplasarea y_2 obținută la nivelul lagărului nr.1 în direcția y – deplasare pentru $k = 0$ N/m
 Figure 5. The y_2 (displacement of bearing 1 on y direction) – displacement for $k = 0$ N/m

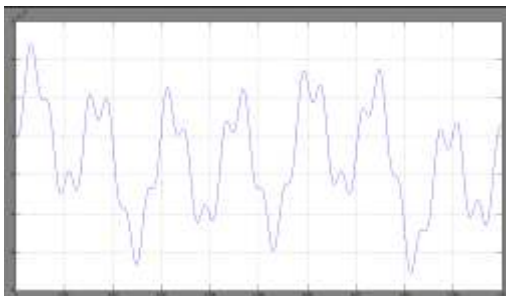


Figura 6. Deplasarea y_2 obținută la nivelul lagărului nr.1 în direcția y – deplasare pentru $k = 10^3$ N/m
 Figure 6. The y_2 (displacement of bearing 2 on y direction) – displacement for $k = 10^3$ N/m

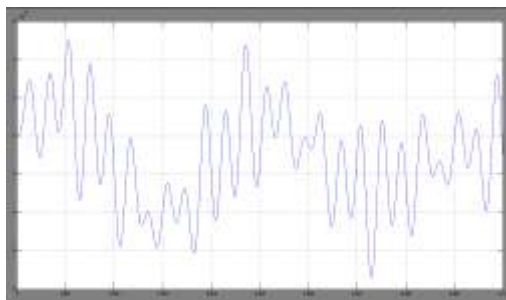


Figura 7. Deplasarea y_3 obținută la nivelul lagărului nr.1 în direcția y – deplasare pentru $k = 10^6$ N/m
 Figure 7. The y_3 (displacement of bearing 2 on y direction) – displacement for $k = 10^6$ N/m

De menționat faptul că pentru simulările realizate anterior s-a studiat doar efectul rigidității asupra comportamentului dinamic al rotorului, pentru amortizarea dată de pelicula de ulei și elementele lagărului valoarea adoptată a fost $c_0 = 0$ Ns/m.

Următorul pas în analiza comportamentului dinamic al rotorilor de turbosuflantă a fost testarea efectivă pe standul de probe a turbosuflantei GTB 2600. Standul de probe pentru o turație de antrenare de 90000 rot/min prezintă precesia rotorului:

It is to be mentioned that the simulations accomplished above have highlighted the influence of the bearing stiffness over the dynamical behavior of the rotor, for the value of oil film and bearing damping the used value was $c_0 = 0$ Ns/m.

The next step performed for analyzing the dynamical behavior of the turbocharger rotor was the test rig testing of the GTB 2600 turbocharger. The test rig for an functioning speed of 90,000 rpm presents the rotor precession:

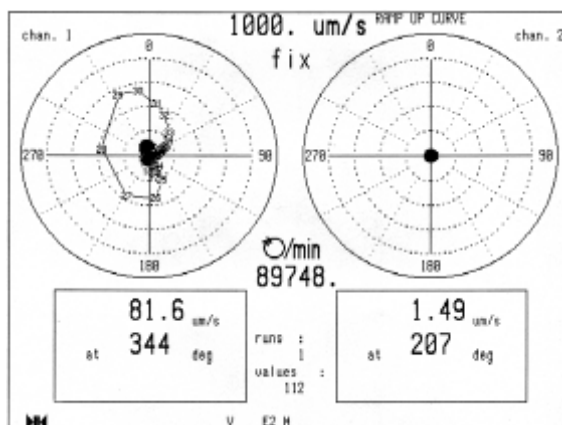


Figura 8. Precesia rotorului pentru o turație de 90000 rot/min
 Figure 8. The rotor precession for 90,000 rpm

4. Concluzii

Rotorul își stabilizează amplitudinea mișcării în jurul unei axe care nu coincide cu axa centrală geometrică Ox a rotorului considerat.

Rigiditatea la nivelul lagărelor joacă un rol important în stabilitatea precesiei rotorului [3].

Fenomenele vibraționale ale turbosuflantei nu sunt legate doar de vibrația propriu-zisă a rotorului acesteia, ci și de vibrații provenite de la alte surse ale autovehiculului.

Masele neechilibrate și excentricitățile conduc la amplificarea fenomenelor vibratorii [6].

Rigiditatea lagărelor joacă un rol important în cazul precesiei rotorului.

Modelarea matematică a rotorilor nu poate surprinde complexitatea fenomenelor dinamice care se pretec în timpul funcționării rotorului.

Standurile pentru analiza comportamentului dinamic al rotorilor de turbosuflantă nu analizează comportamentul efectiv al rotorului în funcționare, ele măsurând doar valoarea generală a dezechilibrului.

Acknowledgement

This paper is supported by the Sectoral Operational Programme Human Resources Development (SOP HRD), financed from the European Social Fund and by the Romanian Government under the contract number POSDRU/88/1.5/S/59321.

References

1. Chiriacescu, S.T. (2004) *Dinamica mașinilor-unelte. Prolegomene (Dynamics of machine tools. Prolegomena)*. Editura Tehnică, ISBN 973-31-2206-8, București, România (in Romanian)
2. Guangchi, Y. (2008) *Turbomachinery rotor dynamics with foundation excitation*. Science Direct, ISSN 0939-1533, Germany
3. Nicoară, D. (2003) *Optimizarea sistemelor mecanice. Aplicații la sistemele rotor-lagăre (Optimization of Mechanical Systems. Applications on Rotor-Bearing Systems)*. Editura Universitatii Transilvania Brașov ISBN 973-635-111-4, Brașov, România (in Romanian)
4. Radeș, M. (2007) *Dinamica turbomașinilor (Dynamics of turbomachinery)*. Editura Printech, ISBN 978-973-718-803-8, București, România (in Romanian)
5. Esfandiari, R.S. (2010). *Modeling and analysis of Dynamic Systems*. ISBN 978-1439808450, CRC Press Inc.
6. Roșca, I.C. (2002) *Vibrații mecanice (Mechanical Vibration)*. Editura Infomarket, ISBN 973-8204-24-0, Brașov, România (in Romanian)

Lucrare primită în mai 2012

Received in May 2012